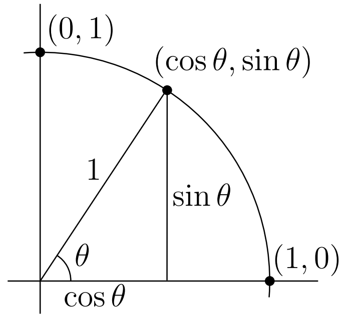
Aide-mémoire

Trigonométrie

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Coniques canoniques

Paraboles : $y = ax^2$, $x = ay^2$. Ellipses : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hyperboles : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

Dérivées

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

Intégrales

(Toutes les primitives sont à une constante près)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \qquad \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \qquad \int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| \qquad \int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x \qquad \int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \qquad \int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a}\tan(ax)$$

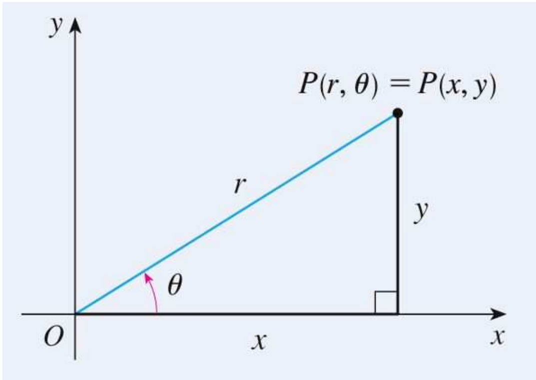
$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| \qquad \int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \qquad \int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

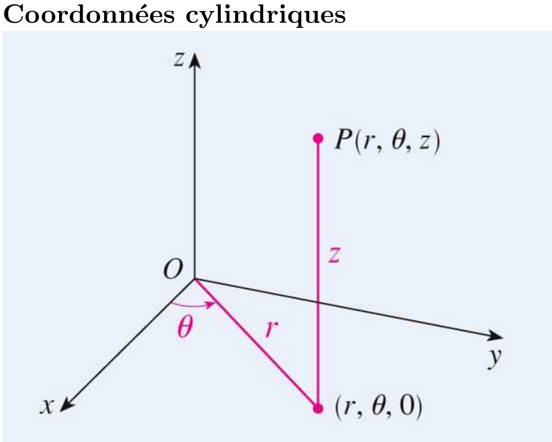
Systèmes de coordonnées classiques dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Coordonnées polaires



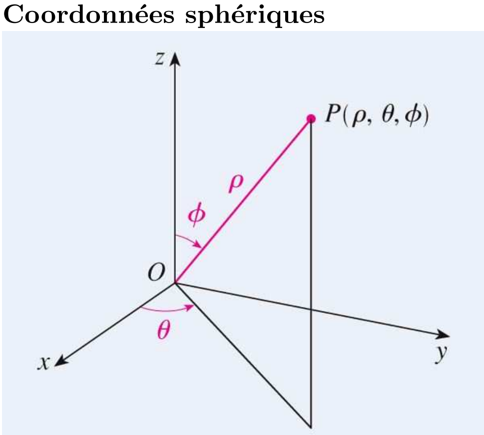
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

Coordonnées cylindriques



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \int\int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dzdrd\theta$$

Coordonnées sphériques



$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\int\int\int_D f(x,y)\,dxdydz$$
$$= \int\int\int_D f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta$$

Formules relatives aux plaques minces dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une plaque mince recouvrant un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ dans le repère Oxy, dont la densité au point (x, y) est donnée par la fonction $\rho(x, y)$. Notons $(\overline{x}, \overline{y})$ son centre de masse, et m sa masse. On notera aussi I_x son moment d'inertie par rapport à l'axe des x, et I_y celui par rapport à l'axe des y. Nous avons alors les formules ci-dessous.

$$
\begin{aligned}
m &= \int\int_D \rho(x, y) dx dy \\
\overline{x} &= \frac{1}{m} \int\int_D x\rho(x, y) dx dy \\
\overline{y} &= \frac{1}{m} \int\int_D y\rho(x, y) dx dy \\
I_x &= \int\int_D y^2 \rho(x, y) dx dy \\
I_y &= \int\int_D x^2 \rho(x, y) dx dy
\end{aligned}
$$

Formules relatives aux solides dans $\mathbb{R}^3$

Considérons un solide occupant un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ dans le repère $Oxyz$, dont la densité au point (x, y, z) est donnée par la fonction $\rho(x, y, z)$. Notons $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ son centre de masse, et m sa masse. On notera aussi I_x son moment d'inertie par rapport à l'axe des x, I_y celui par rapport à l'axe des y, et I_z celui par rapport à l'axe des z. Nous avons alors les formules ci-dessous.

$$
\begin{aligned}
m &= \int\int\int_D \rho(x, y, z) dx dy dz \\
\overline{x} &= \frac{1}{m} \int\int\int_D x\rho(x, y, z) dx dy dz \\
\overline{y} &= \frac{1}{m} \int\int\int_D y\rho(x, y, z) dx dy dz \\
\overline{z} &= \frac{1}{m} \int\int\int_D z\rho(x, y, z) dx dy dz \\
I_x &= \int\int\int_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dx dy dz \\
I_y &= \int\int\int_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dx dy dz \\
I_z &= \int\int\int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dx dy dz
\end{aligned}
$$

Changements de variables généraux pour les intégrales doubles

Soit T la transformation qui envoie un domaine $\widetilde{D}$ (généralement simple à décrire) vers un domaine D. Si la transformation T est définie par $x = g(u,v)$ et $y = h(u,v)$, le jacobien de T est défini par

$$J_T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u.$$

Si nous disposons de u et v exprimées comme étant des fonctions de x et y, il est souvent plus simple de calculer le jacobien en utilisant l'identité

$$J_T = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1} = (u_x v_y - u_y v_x)^{-1}.$$

Théorème : Sous certaines conditions de continuité, de dérivabilité et d'injectivité, nous avons que

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int\int_{\widetilde{D}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J_T(u,v)|\,du\,dv.$$

Note : Ce résultat est aussi valide pour les changements de variables pour les intégrales triples. Nous sommes alors amenés à calculer le déterminant d'une matrice 3×3 pour connaître le jacobien.

Courbes dans le plan et l'espace

Soit C une courbe définie par $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec t qui varie de a à b. Notons L sa longueur, μ sa fonction de densité linéique, m sa masse, et $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ son centre de masse. Finalement, soient I_x, I_y et I_z les moments d'inertie de C par rapport aux axes x, y et z respectivement. Nous avons :

1. $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ est le vecteur tangent à $\vec{r}(t)$;
2. $\vec{s}(t) = \vec{r}(t_0) + t \cdot \vec{r}\,'(t_0), t \in \mathbb{R}$ est l'équation paramétrique de la droite tangente à la courbe $\vec{r}(t)$ au point $\vec{r}(t_0)$ si $t_0 \in [a,b]$;
3. $L = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2}\,dt;$
4. $m = \int_C \mu\,ds = \int_a^b \mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt;$
5. $\overline{x} = \frac{1}{m}\int_a^b x(t)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt,$
   $\overline{y} = \frac{1}{m}\int_a^b y(t)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt,$
   $\overline{z} = \frac{1}{m}\int_a^b z(t)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt;$
6. $I_x = \int_a^b \left(y(t)^2 + z(t)^2\right)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt,$
   $I_y = \int_a^b \left(x(t)^2 + z(t)^2\right)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt,$
   $I_z = \int_a^b \left(x(t)^2 + y(t)^2\right)\mu(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt.$

Travail d'un champ vectoriel

Définition : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel. Le **travail** de $\vec{F}$ le long d'une courbe C paramétrisée par $\vec{r}(t)$ avec t qui varie de a à b est défini par

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \bullet \vec{r}\,'(t)\, dt.$$

Note : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$, le travail de $\vec{F}$ le long de C est aussi donné par

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)dt + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t)dt + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t)dt.$$

Champs vectoriels conservatifs

Définitions : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel. On dit que $\vec{F}$ est **conservatif** s'il existe une fonction f telle que $\nabla f = \vec{F}$. On dit alors que f est une **fonction potentielle** pour le champ $\vec{F}$.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes : Soit C une courbe définie par $\vec{r}(t)$ avec t qui varie de a à b, et soit f une fonction. Alors

$$\int_C \nabla f \bullet d\vec{r} = f\left(\vec{r}(b)\right) - f\left(\vec{r}(a)\right).$$

Définition : On dit que l'intégrale curviligne d'un champ $\vec{F}$ sur un domaine D est **indépendante du chemin** si $\int_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{r}$ quels que soient les chemins C_1 et C_2 dans D ayant les mêmes extrémités.

Définition : On dit qu'un ensemble E est **ouvert**, si on peut entourer chaque point de E par un disque ou une boule qui est elle-même à l'intérieur de E.

Définitions : Un domaine est **connexe** si on peut relier deux points arbitraires du domaine par un chemin, sans le quitter. On dira qu'il est **simplement connexe** s'il est connexe et qu'il ne comporte pas de trous.

Théorème : $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ est **indépendante du chemin** dans D si et seulement si $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$ pour tout chemin fermé C dans D.

Théorème : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel continu sur un domaine ouvert et connexe D. Si $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D, alors $\vec{F}$ est conservatif sur D, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f vérifiant $\nabla f = \vec{F}$.

Théorème : Soit $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ un champ vectoriel conservatif sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. Alors nous avons que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Théorème : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini sur un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{R}^2$. Si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sur D, alors $\vec{F}$ est conservatif.

Intégrales de surface

- Surface S d'équations paramétriques: $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \qquad (u,v) \in D_{uv}$

- Elément de surface: $dA = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|\, du\, dv$

- On évalue l'intégrale de surface à l'aide de la formule

$$\int\int_S f(x,y,z)\,dA = \int\int_{D_{uv}} f(\vec{r}(u,v))\,\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|\, du\, dv.$$

- Exemples d'élément de surface

  - Sphère de rayon R et centrée en (x_0, y_0, z_0).

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_0 + R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y &=& y_0 + R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z &=& z_0 + R\cos(\phi) \end{array}\right. \qquad dA = R^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta.$$

  - Cylindre de rayon a et de hauteur H

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a\cos(\theta) \\ y &=& a\sin(\theta) \\ z &=& z \end{array}\right. \qquad dA = a\, dz\, d\theta$$

  - Cône de sommet O: $\alpha > 0$ constant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& r\cos(\theta) \\ y &=& r\sin(\theta) \\ z &=& \alpha\, r \end{array}\right. \qquad dA = r\,\sqrt{1+\alpha^2}\, dr\, d\theta$$

  - Surface d'équation cartésienne: $z = f(x,y)$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& f(x,y) \end{array}\right. \qquad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\; dx\, dy$$

- Applications des intégrales de surface
  - Aire de la surface S: $A(S) = \displaystyle\int\int_S dA$.
  - Masse: $M = \displaystyle\int\int_S \delta(x,y,z)\,dA$ où $\delta(x,y,z) =$ densité.
  - Centre de masse

$$\bar{x} = \frac{\int\int_S x\,\delta\,dA}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int\int_S y\,\delta\,dA}{M} \qquad \bar{z} = \frac{\int\int_S z\,\delta\,dA}{M}$$

Moments d'inertie

$$\begin{aligned} I_x &= \int\int_S (y^2+z^2)\,\delta\,dA \\ I_y &= \int\int_S (x^2+z^2)\,\delta\,dA \\ I_z &= \int\int_S (x^2+y^2)\,\delta\,dA \end{aligned}$$

- Flux d'un champ vectoriel $\vec{F}$ à travers S:

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$$

  où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface S.

- La normale unitaire est fournie par l'expression

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\|}$$

- On a la formule:

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA = \int\int_{D_{uv}} \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\,du\,dv.$$

Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ un champ vectoriel défini sur un domaine D.

- La divergence de $\vec{F}$:

$$\text{div }\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Le rotationnel de $\vec{F}$:

$$\text{rot }\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- Deux identités importantes:

$$\text{div rot }\vec{F} = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{rot }\vec{\nabla} f = 0.$$

Théorème de Green

- Orientation positive: un observateur qui se déplace sur la courbe, voit toujours le domaine D à sa gauche.
- Soit D un domaine borné du plan $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe plane **fermée** C orientée positivement. On a que
$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$
- Forme vectorielle du théorème de Green
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\int_D \text{rot } \vec{F}\,dA$$
où $\text{rot } \vec{F} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
- Version divergence du théorème de Green
$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int\int_D \text{div } \vec{F}\,dA$$
où $\vec{n}$ dénote la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du domaine D.

Théorème de Gauss

- Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné de l'espace délimité par la surface **fermée** S. Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel continûment dérivable dans D, alors
$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA = \int\int\int_D \text{div } \vec{F}\,dV$$
où $\vec{n}$ dénote la normale unitaire pointant vers l'extérieur de D.

Théorème de Stokes

- Soit S une surface orientée et **ouverte** de normale unitaire $\vec{n}$ dont le bord est une courbe C **fermée**, orientée de manière positive. Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel continûment dérivable défini dans une région qui contient S, alors
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\int_S \text{rot } \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$$
- Autrement dit, le flux du rotationnel de $\vec{F}$ à travers S est égal à la circulation de $\vec{F}$ le long de la courbe frontière C.

Divers

- Equation d'une sphère de centre (a, b, c) et de rayon R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Equation d'un paraboloïde circulaire orienté par rapport à z

$$z = a(x^2 + y^2) \qquad \text{où } a \text{ est un nombre réel}$$

- Equation d'un cône circulaire orienté par rapport à z

$$z^2 = a(x^2 + y^2) \qquad \text{où } a \text{ est un nombre réel}$$

- Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

- Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho\cos\phi & 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$