

AN 2000

MATHÉMATIQUES



UN APERÇU DE LA RECHERCHE
À L'OCCASION DE L'ANNÉE MATHÉMATIQUE MONDIALE

L'Institut des sciences mathématiques

L'ISM est un consortium de six universités québécoises (Concordia, Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM et Université de Sherbrooke) qui regroupe environ 125 professeurs et 350 étudiants. Il coordonne un grand ensemble de ressources, aussi bien matérielles qu'intellectuelles, pour atteindre la masse critique qui fait de Montréal et du Québec un pôle nord-américain majeur de formation et de recherche en sciences mathématiques.

L'ISM est financé directement par le ministère de l'Éducation du Québec et par les six universités membres, à quoi s'ajoutent les subventions de recherche du CRSNG et du FCAR des professeurs participants.

Les activités de l'ISM comprennent un programme de bourses d'excellence pour les étudiants des cycles supérieurs et de bourses postdoctorales, la coordination des cours de maîtrise et de doctorat et celle d'une dizaine de séminaires de recherche hebdomadaires. L'ISM anime un séminaire hebdomadaire destiné aux étudiants, et organise chaque année le colloque pan-québécois des étudiants des cycles supérieurs qui attire un grand nombre d'étudiants hors Québec.

En 1998, un projet conjoint « Liaison cégeps-universités » a été mis sur pied par l'ISM et l'AMQ pour favoriser le rapprochement entre les chercheurs universitaires et les professeurs des

collèges. Depuis ce temps, une trentaine de conférences ont eu lieu dans les cégeps. En octobre 1999, au congrès de l'AMQ, vingt chercheurs ont fait le point sur les mathématiques du XX^e

siècle dans leur domaine, à l'intention d'un large public.

WEB

<http://www.math.uqam.ca/ISM/>



L'Association mathématique du Québec (AMQ)

L'AMQ vise à regrouper toutes les personnes intéressées par les mathématiques: professeurs de tous les ordres d'enseignement, chercheurs en mathématiques fondamentales ou appliquées, didacticiens, mathématiciens dans l'entreprise ou citoyens amateurs de mathématiques.

Depuis sa fondation, l'AMQ s'est intéressée de près à l'enseignement des mathématiques. Elle a produit divers rapports à l'intention du ministère de l'Éducation et d'autres organismes publics, de 1971 à nos jours.

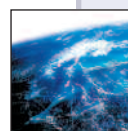
Quatre fois par année paraît le Bulletin AMQ, la revue de l'association. Le Groupe des chercheurs en sciences mathématiques, un groupe d'intérêt de l'AMQ, publie les Annales des sciences mathématiques du Québec, une revue de recherche à l'intention de la communauté mathématique internationale et la Gazette des sciences mathématiques du Québec, un organe de liaison du groupe.

En partenariat avec l'Université de Montréal et l'Université du Québec à Montréal, l'AMQ organise chaque année des concours mathématiques pour le secondaire et le collégial. Les élèves les mieux classés à ces concours sont invités aux camps mathématiques de l'AMQ. En 2000, le camp secondaire aura lieu au Collège Jean-de-Brébeuf et le camp collégial à l'Université du Québec à Trois-Rivières.

WEB

<http://www.Mlink.NET/~amq/AMQ/>

Table des matières



4 Présentation



6 Les mathématiques en Occident, de l'an mil à l'an 2000



10 Taureaux, Internet et quanta : l'arithmétique des très grands nombres



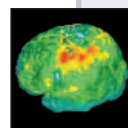
12 Mathématiques et physique: dualités et résonance



14 La complexité apprivoisée : une incursion des mathématiques dans les logiciels de l'informatique



18 À l'assaut de l'aléatoire : les prévisions en probabilités et statistique



20 Mathématiques et société

PRODUIT PAR

l'Institut des sciences mathématiques
et l'Association mathématique du Québec.

COUVERTURE : Alain Mongeau

DESSINS : Tadashi Tokieda

DIRECTION ARTISTIQUE :

· Zack Taylor

· Martine Maksud Graphisme

Mai 2000

général à des modèles totalement aléatoires, les systèmes chaotiques étant plutôt la règle que l'exception. Il y a aussi le fait qu'en général les modèles ne peuvent représenter correctement la réalité. Certains sont excellents dans des situations normales mais totalement invalides pour des cas anormaux. Par exemple, la plupart des modèles utilisés pour les données boursières ne valent plus rien s'il y a une forte baisse ou une forte hausse. Par contre, si l'on veut un modèle pouvant prévoir ces changements brusques, il faut sacrifier la précision dans le cas normal. À lui seul, le domaine de la prévision d'événements extrêmes comme les krachs boursiers et les inondations est un domaine de recherche encore très florissant.

De tous les domaines où les probabilités et la statistique sont utilisées pour faire des prévisions, le plus médiatisé est le marché boursier et plus particulièrement l'évaluation de produits dérivés, dont les options. Dans ce domaine, si l'on réussit à faire une meilleure prévision qu'un compétiteur, on peut réaliser des profits mirobolants. Le prix Nobel d'économie de 1997 a d'ailleurs été décerné à Black et Merton pour leurs contributions dans ce domaine. L'évaluation d'options et d'autres produits dérivés fait appel à plusieurs domaines des mathématiques: en premier lieu les probabilités, ensuite les équations différentielles et les méthodes d'optimisation. ▲

POUR EN SAVOIR PLUS

GLEICK, James, *La théorie du chaos*, collection « Champs », Paris, Flammarion, 1991.

MANDELBROT, Benoît, *Fractales, hasard et finance*, collection « Champs », Paris, Flammarion, 1997.

STEWART, Ian, *Dieu joue-t-il aux dés ? Les nouvelles mathématiques du chaos*, Paris, Flammarion, 1992.

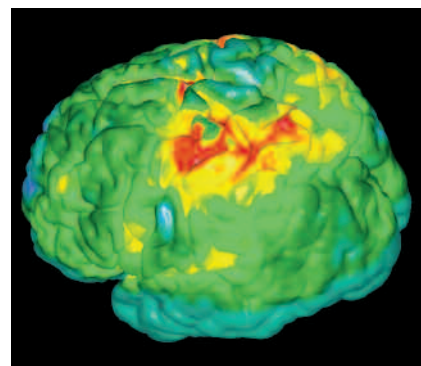
Mathématiques et société

BERNARD COURTEAU
ET BERNARD R. HODGSON

Les sociétés occidentales actuelles s'inspirent des idéaux démocratiques de la Grèce antique. Elles sont cependant beaucoup plus complexes que les sociétés de l'Antiquité et elles sont en train de vivre, après l'écriture, l'imprimerie et le formidable développement scientifique et technique des trois derniers siècles, l'une des plus profondes révolutions du support de l'information, la numérisation. Quelle est la place des mathématiques dans les sociétés actuelles ? Quel est leur rôle social ?

Nous proposons ici quelques éléments de réflexion. D'abord, les mathématiques jouent un rôle particulier dans le développement d'une attitude rationnelle chez le citoyen. Ensuite, en tant que langue des sciences, les mathématiques, avec leur arsenal de méthodes numériques, symboliques et graphiques, fournissent aux autres sciences et aux techniques un outillage théorique efficace. Enfin, en tant que science de plein droit, les mathématiques ont développé des applications directes qui sont appelées à jouer un rôle croissant dans un monde technologique qui semble vouloir poursuivre la transformation radicale de la société amorcée au XX^e siècle.

Une nécessité actuelle: poser et résoudre des problèmes Il va de soi que le citoyen des sociétés actuelles doit posséder des outils mathématiques de base pour bien fonctionner au quotidien en tant que consommateur avisé, ou pour apprécier à sa juste valeur l'information quantitative qu'il reçoit sous diverses formes: tableaux numériques, graphiques, résultats de sondages, etc. Il lui est



Cette image a été produite à partir d'un signal relevé sur un certain nombre de sujets en train de réaliser une suite de mouvements. On a eu recours ici aux techniques de l'imagerie médicale. Image fournie gracieusement par le Centre d'imagerie du cerveau McConnell, Institut Neurologique de Montréal.

aussi de plus en plus utile de savoir manier l'ordinateur et de naviguer sur la Toile, ce qui exige une bonne capacité de structuration de données et de visualisation d'une telle structure. Mais surtout, face à toutes sortes de situations plus ou moins complexes, il lui faut pouvoir analyser, comprendre, prendre des décisions, ce qui nécessite des habiletés à poser et résoudre des problèmes. Considérant, avec le mathématicien américain Henry O. Pollack, que « résoudre un problème, c'est réduire quelque chose qu'on ne sait pas faire à quelque chose qu'on sait déjà faire », on voit qu'il faut aussi et surtout des habiletés plus abstraites pour faire une telle réduction. En ce sens, ce n'est pas l'ordinateur qui résout seul les problèmes. Son rôle consiste plutôt à expliciter des réponses à des problèmes déjà résolus par ailleurs au moyen de méthodes générales ou d'algorithmes, eux-mêmes précédés de résultats théoriques.

Le rôle de la réflexion théorique, en plus de satisfaire la curiosité intellectuelle et le sens esthétique, consiste à fournir des outils efficaces pour résoudre des



problèmes en cherchant à trouver les règles générales sous-tendant les phénomènes en cause. Sans théorie, on en est réduit à son intuition ou au hasard, ou encore, à l'essai de tous les cas possibles, ce qui est impraticable pour les problèmes d'une certaine envergure même avec les ordinateurs les plus puissants. En fait, les nouvelles technologies de l'information et des communications valorisent encore plus la logique de résolution de problèmes dans tous les domaines.

Vers une attitude rationnelle L'apprentissage des mathématiques fournit aux étudiants des situations contrôlées dans lesquelles ils peuvent s'exercer à cette logique. Par exemple, la résolution d'un problème de géométrie donne à l'élève l'occasion de se poser des questions de base comme: Qu'est-ce que je cherche? Qu'est-ce qui est donné? Y a-t-il quelque chose que je connais déjà et qui pourrait être pertinent au problème? En supposant le problème résolu, puis-je établir une relation entre ce qui est inconnu et ce qui est connu? Quels outils, raisonnements, analogies, calculs, graphiques, etc. puis-je utiliser

C'est de la lumière cohérente qui circule dans la fibre optique. Il suffit de quatorze lasers pour transmettre 40 millions de conversations simultanées dans un câble transatlantique. Comment ce miracle est-il possible? La physique contribue au hardware mais ce sont les mathématiques qui permettent le traitement d'un nombre aussi grand de communications.

pour tirer de cette relation assez d'information en vue de résoudre le problème? La solution obtenue est-elle unique ou multiple? Comment vérifier si le problème est bien résolu? L'intérêt de ces questions réside dans leur universalité: face à tout problème, elles se posent naturellement et on pourrait dire, en simplifiant, que les poser et tenter d'y répondre est le propre d'une attitude rationnelle.

L'adage du philosophe des sciences Karl Popper, « Ce qu'on lègue en sciences, ce n'est pas simplement une liste d'énoncés valides mais aussi les moyens de les critiquer », s'applique aux mathématiques d'une façon exemplaire, puisque la conviction y est obtenue par une suite d'étapes parfaitement justifiées où l'on parvient à déduire la conclusion que l'on souhaite établir à partir des hypothèses et du savoir antérieur. Cette nécessité de la rigueur en mathématiques est un ferment de créativité. En effet, si on est contraint de justifier rigoureusement ce qu'on avance, on cherche plus longtemps et différem-

ment, et on trouve souvent des choses nouvelles que notre intuition immédiate ne nous aurait pas données sans cet effort. Les cours de mathématiques à l'école pourraient devenir de véritables laboratoires d'une culture du conditionnel. La démonstration d'un énoncé de type « p implique q », où p et q sont des énoncés, est une façon articulée d'aborder la question « Pourquoi q est-il vrai? » ou plus précisément « Dans quel sens, dans quel cadre, sous quelles conditions peut-on considérer q comme vrai? ». On ne peut sous-estimer l'importance d'une telle attitude de critique positive. En dégageant les hypothèses sous-jacentes, on combat la confusion et la rhétorique qui pourraient s'y nourrir, on clarifie les choses et on met l'accent sur les véritables enjeux.

Mathématiques et méthode scientifique Mais il y a plus. Les mathématiques sont un instrument pour dépasser les limites de nos sens, pour rendre accessible ce qui est hors de portée de notre intuition spontanée. Les mathé-

matiques permettent de développer une sorte d'intuition seconde donnant accès à un monde nouveau qui permet en quelque sorte de rêver rationnellement la réalité. Comme le dit le mathématicien français René Thom, « La théorisation est liée à la possibilité de plonger le réel dans un virtuel imaginaire doté de propriétés génératives qui permettent de faire des prédictions. » Quand Thalès, par exemple, veut connaître la hauteur de la pyramide de Chéops, une verticale inaccessible, il la ramène à son ombre qui est accessible à la mesure, le lien entre les deux se trouvant dans sa théorie



des triangles semblables. Quand Newton veut décrire d'une façon générale le mouvement des corps matériels, il crée de toute pièce un outil mathématique nouveau: le calcul infinitésimal. Plus près de nous, quand Einstein veut exprimer son intuition physique du temps, de l'espace et de la matière dans sa théorie de la relativité, il fait appel à une géométrie non euclidienne développée plus de cinquante ans auparavant par Riemann. Depuis leurs origines, les mathématiques n'ont cessé de permettre aux scientifiques de concevoir et d'exprimer des modèles du monde et d'en tirer logiquement des conséquences vérifiables sur le plan expérimental.

Enfin, en plus d'être une discipline au service de la formation du citoyen et au service des autres sciences, en plus d'être elles-mêmes une science fondamentale, les mathématiques ont développé des applications plus directes dans des domaines comme l'économie et la finance, les télécommunications ou la recherche biomédicale. À titre d'exemple, la transmission d'images de planè-

tes, la télévision numérique, l'enregistrement sur disque numérique utilisent des codes correcteurs d'erreurs, une autre application surprenante de mathématiques considérées jusqu'à récemment comme très abstraites et « inutiles », mais qui sont maintenant le pain quotidien des ingénieurs en électricité; les problèmes d'organisation du travail, de gestion de réseaux complexes de transport seraient insolubles sans l'apport de méthodes mathématiques nouvelles développées depuis une cinquantaine d'années; l'imagerie médicale, la tomographie ou la modélisation du système cardiaque profitent des avancées de la théorie des systèmes dynamiques et de la topologie, deux domaines mathématiques en plein essor. Dans toutes ces applications, l'ordinateur joue un rôle très visible mais qui n'est que la pointe de l'iceberg: il y a toujours en dessous des méthodes et des résultats mathématiques indispensables. Comme le disait Jean-Jacques DUBY, directeur scientifique d'IBM Europe, « il n'y a plus de frontière entre maths pures et maths appliquées. Il n'y a que celles qui sont déjà appliquées et celles qui ne le sont pas encore ». Les mathématiques mènent une vie multiple et participent aux recherches tant appliquées que théoriques dans presque tous les domaines. Elles ont beaucoup à offrir au monde qui vient. ▲

POUR EN SAVOIR PLUS

GUEDJ, Denis, *Le théorème du perroquet*, roman, Paris, Éditions du Seuil, 1998.

GUEDJ, Denis, *La gratuité ne vaut plus rien*, Paris, Éditions du Seuil, Paris, 1997.

SERRES, Michel, *Les origines de la géométrie*, Paris, Flammarion, 1993.

STEEN, Lynn Arthur (éd.), *Why Numbers Count*, New York, College Entrance Examination Board, 1997.

THOM, René, *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Flammarion, 1991.

Aux sources de la science mathématique

— M. Ruche, pourquoi les mathématiques sont-elles nées en Grèce et pas ailleurs, au VI^e siècle et pas à une autre époque ?

— Parce que les Grecs adorent discuter, répond monsieur Ruche à sa jeune amie Léa. Parce qu'au contraire des mathématiciens-calculateurs babyloniens ou égyptiens qui appartenaient à la caste des scribes ou à celle des prêtres, les penseurs grecs qui ont fondé la science mathématique, Thalès, Pythagore et les autres, ne sont ni esclaves ni fonctionnaires d'État, ils sont des hommes libres. Les mathématiques et la philosophie grecques sont enfants de la liberté, du jeu que permet cette liberté, jeux du corps dans les stades où les athlètes s'affrontent, jeux de l'esprit sur les places publiques où l'on combat par la parole. Et dans ces discussions, les individus sont responsables des thèses qu'ils avancent non pas devant une autorité particulière, mais devant chaque interlocuteur qui peut à son tour user de sa liberté pour les critiquer, les contester, les contredire. Pour régler les conflits et les contradictions qui ne manquaient pas de surgir, les mathématiciens grecs en sont venus à exiger plus que l'intuition ou les preuves numériques pour établir des faits mathématiques et convaincre leurs interlocuteurs, ils ont exigé la démonstration, ils ont inventé la méthode déductive...

C'est ainsi qu'en substance l'historien des sciences, professeur et romancier Denis Guedj relate, dans son roman *Le théorème du perroquet*, les origines de la science mathématique. ▲