LE CALCUL INFINITÉSIMAL

Bernard R. Hodgson

Université Laval, Canada

LES INFINITÉSIMAUX AU FIL DES ÂGES

> It is interesting that a method which had been given up as untenable has at last turned out to be workable and that this development [...] was brought about by the refined tools made available by modern mathematical logic. (Robinson, 1973, p. 16)

Le concept d'*infinitésimal*, de quantité « infiniment petite », a connu un sort variable au fil des âges. Bannis par les uns, utilisés de façon heuristique mais souvent avec circonspection par les autres, les infinitésimaux, jusqu'à tout récemment, n'avaient pas droit de cité en mathématiques, surtout après que les analystes du XIX^e siècle eurent introduit dans le calcul différentiel et intégral, par l'approche en ε–δ, un canon de rigueur ayant cours jusqu'à nos jours. Bien sûr le physicien et l'ingénieur avaient persisté dans leur utilisation intuitive des infinitésimaux, mais le mathématicien savait que tout cela pouvait (et devait !) être remplacé par un discours rigoureux évacuant toute notion d'infiniment petit actuel.

Déjà les Grecs utilisaient les infinitésimaux pour résoudre certains problèmes de géométrie. Ainsi Archimède (287-212 A.C.) s'autorise à opérer sur des décompositions infinies des figures. Toutefois, il s'agit là pour lui strictement d'une méthode de découverte de propriétés, non d'une façon acceptable de les démontrer rigoureusement. Travaillant dans la tradition d'Aristote et d'Euclide, Archimède voit les nombres comme satisfaisant à ce qu'on appelle aujourd'hui la *propriété d'Archimède* : étant donné deux nombres, le plus petit, additionné à lui-même un certain nombre (fini !) de fois, en viendra toujours à surpasser l'autre. Un tel contexte interdit donc l'existence d'infiniment petits. Néanmoins, comme il le révèle dans son traité *La méthode* (découvert en 1906 seulement), Archimède n'hésite pas à faire appel à son intuition des quantités infinitésimales pour identifier certaines relations (comme le volume d'une sphère). Intervient ensuite une étape de validation dans laquelle ces relations sont prouvées par une argumentation indirecte (la « méthode d'exhaustion »), débarrassée de toute présence infinitésimale.

Pour illustrer l'apport des infinitésimaux, considérons une preuve de Nicolas de Cuse (1401-1464) établissant le rapport entre l'aire d'un cercle et sa circonférence (Davis et Hersh, 1980, p. 238). Soit un cercle de rayon r que nous envisageons comme un polygone ayant une infinité de côtés infiniment petits et tous égaux entre eux (voir figure 1, où une portion du cercle est observée à l'aide d'un « microscope infinitésimal » à grossissement infini, tel qu'utilisé dans Keisler (1986)). Chacun de ces côtés est la base d'un triangle isocèle dont le sommet est le centre du cercle et dont la hauteur h est le rayon r du cercle, puisque la base du triangle est infiniment courte. L'aire du cercle, étant la somme des aires de ces triangles, est donc égale à la somme des bases (c'est-à-dire la circonférence) multipliée par $\frac{r}{2}$. Une telle argumentation pourrait être remplacée, par exhaustion, par un raisonnement par contradiction n'utilisant que des constructions finies (Davis et Hersh, 1980, p. 240). On obtient ainsi une preuve répondant aux canons classiques de rigueur mais occultant forcément, par son approche indirecte, l'intuition forte suggérée par la vision infinitésimale.

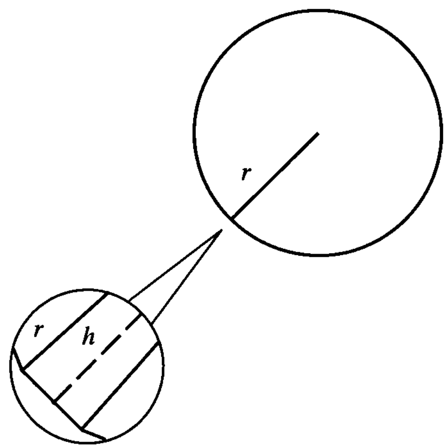

Figure 1

La mise en place d'une théorie générale de la différentiation et de l'intégration fut réalisée simultanément par Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716). Si Newton utilise à la fois une vision infinitésimale et une vision reposant sur la notion de limite, accordant finalement sa préférence à cette dernière, Leibniz, de son côté, choisit résolument l'approche infinitésimale. Mais pour lui, les infiniment grands ou petits n'ont pas d'existence

véritable: ce ne sont que des « façons de parler », des « fictions ». Il oppose l'emploi des infinitésimaux au « style d'Archimède » (entendre les arguments indirects résultant de la méthode d'exhaustion — Leibniz ignorait évidemment les heuristiques infinitésimales d'Archimède dévoilées dans *La méthode*) :

> [...] on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur [...] Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer. (Robinson, 1974, pp. 261-262)

Le calcul développé par Newton et Leibniz a vite connu des succès éclatants dans ses applications. Cependant de sérieuses difficultés logiques sont apparues quant à ses fondements, tant selon l'approche de Newton que celle de Leibniz. Ainsi le recours aux infinitésimaux amène une contradiction flagrante, comme l'illustre le calcul de la dérivée de x^2 :

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

L'accroissement infinitésimal dx, qui se comporte comme zéro à la fin du calcul, ne peut bien sûr être nul au départ. Cette ambivalence n'a pas manqué d'être sévèrement attaquée, en particulier par Berkeley (1685-1753). Dans son célèbre pamphlet *The analyst*, celui-ci condamne avec virulence l'utilisation de ces « incréments évanescents » :

> For when it is said, let the increments vanish, i.e., let the increments be nothing, or let there be no increments, the former supposition that the increments were something, or that there were increments, is destroyed, and yet a consequence of that supposition, i.e., an expression got by virtue thereof, is retained. [...] I have no controversy about your conclusions, but only about your logic and method. (Berkeley, 1734, pp. 25, 30)

Même si la controverse entourant le statut des infinitésimaux n'empêche pas Euler (1707-1783) de les utiliser avec art (voir Robert, 1985, pp. 3-5), de telles attaques eurent néanmoins un effet dévastateur. Et si les infiniment petits se retrouvent encore un siècle plus tard dans les textes de Cauchy (1789-1857), c'est essentiellement dans un rôle heuristique « d'intermédiaires qui doivent [...] conduire à la connaissance des relations qui subsistent entre des quantités finies » (Robinson, 1974, p. 275), comme chez Archimède. Car avec Cauchy, et plus tard avec Weierstrass (1815-1897), se construit la théorie moderne des limites et de la continuité telle que nous la connaissons aujourd'hui, où les considérations infinitésimales cèdent la place à des inégalités en ε–δ. Pour le mathématicien, les infinitésimaux tombent alors en désuétude complète, même s'ils restent un outil commode dont ne se privent pas d'autres scientifiques.

Il y a un peu plus de trente ans, Abraham Robinson (1918-1974) a découvert comment certains outils de la logique mathématique, plus précisément de la théorie des modèles, permettent de construire un corps de nombres *hyperréels* grâce auquel le calcul différentiel et intégral peut être développé de façon rigoureuse dans un contexte infinitésimal : cette légitimation *a posteriori* permet au mathématicien d'aujourd'hui de revenir en toute sérénité aux méthodes si fécondes faisant intervenir explicitement l'infiniment grand et l'infiniment petit (et remet en lumière l'expression traditionnelle *calcul infinitésimal*).

Après un rappel des fondements logiques du calcul infinitésimal moderne, nous en présentons certaines versions qui débouchent sur des approches conçues spécifiquement à des fins pédagogiques en vue du renouvellement de l'enseignement élémentaire de l'analyse.

LE CORPS DES HYPERRÉELS

> Skolem's works on non-standard models of Arithmetic was the greatest single factor in the creation of Non-standard Analysis. (Robinson, 1974, p. 278)

Nous voulons examiner brièvement de quelle façon la logique mathématique intervient dans la construction primitive de Robinson. À cette fin, nous indiquons comment des résultats de Skolem, d'abord perçus comme témoignant d'aspects pathologiques des formalismes, recèlent l'idée maîtresse sous-jacente à une introduction rigoureuse de quantités infiniment grandes et petites.

L'étude des langages formels implique une double vision syntaxique et sémantique, rendant compte à la fois des aspects déductifs (énoncé *formellement démontrable*) et interprétatifs (énoncé *vrai* sous telle interprétation). Plus généralement, on s'intéresse à la notion d'ensemble d'énoncés *cohérent* (n'engendrant pas de contradiction) et possédant un *modèle* (c'est-à-dire une structure d'interprétation rendant vrais ses énoncés). Le *théorème de complétude,* démontré par Gödel en 1930, affirme justement l'équivalence entre la syntaxe et la sémantique, dans le sens qu'un ensemble d'énoncés est cohérent si et seulement s'il a un modèle. Un corollaire immédiat en est le *théorème de compacité*, qui donne l'équivalence entre l'existence d'un modèle pour un ensemble Γ d'énoncés et l'existence, pour chaque sous-ensemble fini de Γ, d'un modèle. C'est cette propriété de finitude qui joue le rôle-clé dans la construction suivante, donnée par Skolem en 1934.

Soit la structure $\mathcal{N}$ de l'arithmétique dans les naturels et le langage formel correspondant $\mathcal{L}$ muni des symboles appropriés (entre autres pour l'addition et la multiplication). Nous désignons par *Théorie* $(\mathcal{N})$ l'ensemble des énoncés de $\mathcal{L}$ vrais dans $\mathcal{N}$. Le « truc » syntaxique permettant d'obtenir un *modèle non standard* de l'arithmétique consiste à enrichir $\mathcal{L}$ par l'ajout

d'un nouveau symbole formel a jouant le rôle d'élément infini par l'intermédiaire des énoncés $n < a$ où n est un naturel quelconque. Nous obtenons ainsi, au niveau du langage enrichi $\underline{\mathcal{L}}$, l'ensemble d'énoncés $\underline{\Gamma}$ = *Théorie* $(\mathcal{N}) \cup \{n < a \mid n \text{ naturel}\}$ qui, par compacité, possède un modèle, disons $\underline{\mathcal{N}}^*$, dont la restriction au niveau de $\mathcal{L}$ donne un modèle $\mathcal{N}^*$ de l'arithmétique englobant $\mathbb{N}$ et dans lequel vivent des éléments infinis. Par construction même, les deux structures $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ sont *élémentairement équivalentes* ($\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}^*$), dans le sens qu'elles valident exactement les mêmes énoncés de $\mathcal{L}$: c'est là le fameux *principe de transfert* qui joue un rôle fondamental dans l'utilisation des modèles non standard. La figure 2 schématise les étapes de cette construction, les flèches pleines indiquant les changements de niveau de langage.

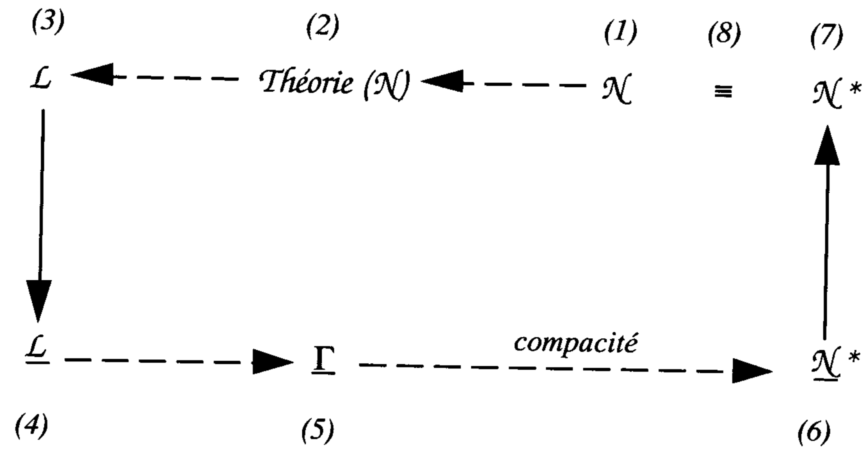

Figure 2

Le constat ayant permis à Robinson de donner des assises rigoureuses au calcul infinitésimal est que la même démarche, mais cette fois à partir du corps $\mathcal{R}$ des réels, donne une structure $\mathcal{R}^*$ de nombres *hyperréels* comprenant des infinis et conséquemment, par inverse multiplicatif, des *infinitésimaux.* (L'appellation *analyse non standard* utilisée par Robinson pour dénommer sa théorie indique d'ailleurs clairement son origine dans les modèles non standard — pour certains (Deledicq, 1992), le sigle anglais « NSA » en est venu à désigner la Nouvelle et Simple Analyse.) La structure $\mathcal{R}^*$ étant obtenue à partir d'un corps, on a donc une « belle » arithmétique des hyperréels. À noter cependant qu'en tant que corps ordonné contenant proprement $\mathcal{R}$ comme sous-corps ordonné, les hyperréels forment nécessairement un corps transgressant la propriété d'Archimède (Levitz, 1974) : cela ne contredit aucunement le principe de transfert si l'on prend garde de traduire « $\forall xy$ réels, $\exists n$ naturel tel que $y < nx$ » par « $\forall xy$ hyperréels, $\exists n$ *hypernaturel* tel que $y < nx$ », de sorte que le multiple nx peut être vu comme résultant d'une « somme infinie ».

La présence d'infinitésimaux nous permet de définir, outre l'égalité habituelle, une relation d'« égalité à un infinitésimal près » : deux hyperréels a et b sont *infiniment voisins* ($a \approx b$) lorsque leur différence $a - b$ est infinitésimale (et non forcément nulle). C'est cette relation qui fournit la solution à l'aporie révélée par Berkeley, puisque l'on peut maintenant conclure, pour la dérivée de x^2, que $2x + dx \approx 2x$.

S'il a semblé utile de rappeler la construction primitive de Robinson, c'est qu'elle apporte une réponse limpide et éclatante au problème de l'existence d'une structure dans laquelle cohabitent (en harmonie !) des nombres finis, infiniment grands et infiniment petits. Qu'une telle structure puisse exister était fortement contesté par exemple par un Cantor qui prétendait pouvoir en démontrer l'impossibilité à l'aide de sa théorie du transfini (Luxemburg, 1979, p. xxxi) ou un Russell qui concluait ses remarques sur le calcul infinitésimal par les commentaires : « Hence infinitesimals as explaining continuity must be regarded as unnecessary, erroneous, and self-contradictory » (Russell, 1903, p. 345).

De nombreuses approches, donnant lieu à une littérature abondante, ont été proposées en vue de concrétiser la construction précédente, approches qu'il est bien sûr impossible de présenter dans le cadre de ce texte. Qu'il suffise de mentionner l'utilisation des ultrapuissances et élargissements par Robinson lui-même (Robinson, 1974), les approches algébriques de Hatcher (1982) ou Laugwitz (1986), ou encore l'utilisation de séries formelles par Tall (1980). Plusieurs de ces approches sont évocatrices de la construction des réels via les suites de Cauchy, ce qui les rend attrayantes pour quiconque est habitué à ce formalisme (à ce sujet, on consultera avec profit les expositions faites, entre autres, dans Artmann, 1988 ; Ebbinghaus *et al.*, 1991 ; Henle et Kleinberg, 1979 ; Hoskins, 1990 ; ou Hurd et Loeb, 1985). Toutefois, si on a en vue des applications pédagogiques du calcul infinitésimal, il est clair que l'effort consacré à construire rigoureusement les hyperréels vient entraver la démarche d'apprentissage en analyse proprement dite — de même pour les réels d'ailleurs, dans un cadre classique. C'est dans cette optique que des approches axiomatiques ont été élaborées.

AXIOMATISATION DU CALCUL INFINITÉSIMAL

> Once one recovers from the shock of being told that infinitesimals and other idealized elements were there all along in the sets with which we are familiar, [...] one will find our approach very easy to use. (Nelson, 1977)

Une critique fréquente des opposants à un enseignement de l'analyse hyperréelle est qu'un cours de logique est quasiment préalable. La réponse

de Keisler a été de produire un manuel d'enseignement élémentaire du calcul (Keisler, 1986) dans lequel les propriétés mathématiques des nombres (réels et) hyperréels sont cristallisées sous forme de quelques axiomes : ceux donnant les propriétés algébriques et d'ordre usuelles des réels ; l'axiome de la complétude des réels ; un axiome d'extension énonçant l'existence d'un sur-ensemble des réels contenant un infinitésimal et auquel toute fonction réelle peut être prolongée ; et enfin un axiome de transfert affirmant qu'une propriété vraie de tous les réels l'est également de tous les hyperréels. On en tire toutes les notions requises pour le calcul infinitésimal, en particulier la fonction st qui associe à tout hyperréel fini le réel constituant sa *partie standard* (de sorte que, par exemple, $st(2x + dx) = 2x$).

Si l'axiomatisation de Keisler présente les hyperréels comme un prolongement des réels, tout comme chez Robinson, il en va autrement de l'approche de Nelson (1977) dans laquelle les « nouveaux » nombres sont en quelque sorte déjà là mais ne peuvent être perçus qu'avec des « lunettes » spéciales. Élaborée dans un contexte ensembliste, l'axiomatique de Nelson repose sur l'adjonction d'un prédicat *standard* à la théorie classique des ensembles (disons ZFC — i.e. Zermelo-Fraenkel avec choix) dont l'utilisation est codifiée par trois axiomes dits d'*idéalisation*, de *standardisation* et de *transfert* (d'où le sigle IST désignant la « Internal Set Theory » de Nelson). La robustesse théorique de cette approche tient dans le fait qu'IST est une *extension conservative* de ZFC (Nelson, 1977), c'est-à-dire que tout ce que IST démontre à propos des objets classiques de la théorie — ceux dont la définition ne fait pas intervenir le nouveau prédicat — est déjà un théorème de ZFC. (Ceci n'est pas sans rappeler l'intuition sous-jacente à l'équivalence élémentaire.) IST est donc *cohérente relativement à* ZFC : si la contradiction $1 = 0$ pouvait y être démontrée, elle serait aussi un théorème de ZFC. Robinson avait clairement envisagé la possibilité d'une approche à la Nelson :

> However, from a formalist point of view we may look at our theory syntactically and may consider that what we have done is to introduce *new deductive procedures* rather than new mathematical entities. (Robinson, 1974, p. 282)

Le cadre restreint de ce travail ne permet pas une étude détaillée de chacun des axiomes d'IST (que le lecteur pourra trouver dans des ouvrages tels Deledicq et Diener (1989), Diener et Reeb (1989) et Robert (1985), ou encore dans l'un des nombreux articles traitant du sujet, entre autres dans Deledicq (1990), Diener et Diener (1989), Gilbert (1992), Robert (1984), et Robert (1989)). Qu'il suffise d'en indiquer certaines conséquences. L'axiome d'*idéalisation* (qui n'est pas sans rappeler un argument de compacité, en ramenant la satisfaction d'une propriété à sa satisfaction dans les parties finies de l'univers) entraîne l'existence d'éléments « idéaux » au sein même des ensembles habituels ; en particulier, il existe dans les naturels des entiers « illimités », c'est-à-dire majorant tout entier *standard* (au sens du prédicat adjoint). C'est ce résultat qui sous-tend l'assertion célèbre de Reeb (1979) :

« Les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$. » En d'autres termes, les nombres jouant le rôle d'infiniment grands sont déjà là, parmi les naturels, mais avant Nelson on ne les « voyait » pas (de même se trouvent déjà dans $\mathbb{R}$ des « infiniment grands » et des « infiniment petits »). L'axiome de *standardisation* permet d'associer à toute construction un ensemble standard regroupant tous les objets standard résultant de la construction. On en déduit l'existence d'un objet standard « au voisinage » de tout objet : on a ainsi la notion de *partie standard* sur laquelle repose l'étude des limites. Quant au *transfert*, il affirme qu'une propriété classique est universellement vraie dès qu'elle est vraie des objets standard. De façon équivalente, si une propriété classique peut être satisfaite dans l'univers d'interprétation, alors ce fait peut être « observé », en ce sens que la propriété doit être vraie pour certaines valeurs standard. Il résulte de cet axiome que les objets usuels (0, π, $\mathbb{R}$, sinus, ...) sont standard.

Il ne faut pas sous-estimer le « choc culturel » que constitue cette présence d'infiniment grands et petits au sein des ensembles habituels. C'est là un changement majeur de perspective par rapport au point de vue d'un Keisler, pour qui l'univers est modifié par l'*ajout* de ces éléments idéaux. Chez Nelson, les éléments idéaux sont déjà présents dans notre univers numérique (ils sont donc tous finis !), mais on ne les distinguait pas auparavant des nombres standard — un peu, pour reprendre l'image de Deledicq (1992), comme si les nombres avaient été créés en couleur mais que nous ne les percevions qu'en noir et blanc. Un tel cadre permet l'élaboration d'une théorie de différenciation des *ordres de grandeur* qui n'avait pas vraiment trouvé place jusqu'ici en mathématiques. À cet égard, il est préférable de parler de nombre *idéalement grand* (i-grand) ou même simplement *très grand*, plutôt qu'« infiniment grand » (Deledicq, 1992 ; Wallet, 1992). En convenant d'appeler *appréciable* un nombre ni i-grand ni i-petit, on peut mettre en place des règles opératoires (« règles de Leibniz », Deledicq, 1992) pour l'arithmétique des ordres de grandeur — voir figure 3, où l'on désigne par *limité* un nombre qui n'est pas i-grand. (À remarquer que les appréciables sont tous du même ordre de grandeur, mais qu'il n'en est pas de même des i-petits ou des i-grands. Il est utile d'introduire une deuxième généralisation

+	ip	app	ig
ip	ip	app	ig
app	app	lim	ig
ig	ig	ig	?

×	ip	app	ig
ip	ip	ip	?
app	ip	app	ig
ig	?	ig	ig

÷	ip	app	ig
ip	?	ip	ip
app	ig	app	ip
ig	ig	ig	?

Figure 3

de l'égalité où l'on compare a et b en vérifiant si le rapport $\frac{a}{b}$ est i-voisin de 1 : on retrouve ainsi les notions d'égalités arithmétique et géométrique d'Euler — Laugwitz, 1986, p. 91.)

L'intérêt d'un modèle des changements d'ordre de grandeur peut être illustré par certaines analogies, comme l'évolution quotidienne des revenus engendrés par un placement de 1,00 $ à un taux de 8 % : chaque journée correspond à un revenu de 0,00022 $, valeur « petite » à l'échelle de la monnaie courante, de sorte que la valeur de l'avoir, en espèces sonnantes et trébuchantes, reste inchangée jour après jour ; c'est en effectuant le produit par le nombre « grand » 365 que l'on retrouve le revenu annuel (appréciable) de 0,08 $. Ou encore si le passage du singe à Darwin a pu se faire par des étapes correspondant chacune à une évolution « petite », c'est que le nombre de générations intermédiaires est « grand » (mais bien sûr fini). (À noter que comme les réels ne résultent pas pour Nelson d'une extension de corps, il n'est pas étonnant que ceux-ci satisfassent la propriété d'Archimède : l'énoncé « $\forall xy$ réels, $\exists n$ naturel tel que $y < nx$ » est vérifié, pour un x i-petit, en prenant un entier n i-grand approprié.)

APPLICATIONS PÉDAGOGIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

> But so great is the average person's fear of infinity that to this day calculus all over the world is being taught as a study of *limit processes* instead of what it really is: *infinitesimal analysis.* (Rucker, 1982, p. 87)

Il n'est pas facile de faire un bilan exact de l'impact pédagogique de la théorie moderne des infinitésimaux sur l'enseignement de base en analyse. Les remarques suivantes pourront néanmoins donner une idée de l'activité en ce domaine. Il convient sans doute de distinguer deux mouvements, le premier étant plus près d'une approche à la Keisler et l'autre, en nette progression, se situant dans la lignée de Nelson.

La réhabilitation des infinitésimaux par Robinson a rapidement suscité des expériences visant à mettre à profit leur potentiel pédagogique, compte tenu tant de l'intuition forte qu'ils véhiculent que de la simplification logique — diminution des quantificateurs — qui résulte habituellement de la formulation dans un contexte non standard de notions telles que limite ou continuité. Le traité de Keisler (1986) a été rédigé dans cette optique et a été utilisé régulièrement dans divers contextes pédagogiques depuis près de vingt ans. L'expérience la plus célèbre à cet égard est sans doute l'étude comparative de Sullivan (1976) établissant clairement que cette approche constitue une solution intéressante et viable — tout en n'étant pas la solution-miracle aux maux de l'enseignement. Un autre document fréquemment utilisé dans l'enseignement est le texte succinct de Henle et Kleinberg (1979). On trouvera dans Artigue *et al.* (1986) le rapport d'un cours fondé sur ce texte ainsi qu'une analyse détaillée des réponses d'un examen qui amène les auteurs à conclure que la majorité des étudiants semblent avoir profité de l'enseignement. Des expériences pédagogiques sont également relatées dans Wattenberg (1983) et Foley (1986), tandis que Fígols (1990) utilise les hyperréels en vue d'un enseignement élémentaire. Tall (1981) compare la vision infinitésimale avec d'autres approches pédagogiques, en particulier avec les méthodes numérique et graphique sur ordinateur. Il convient enfin de souligner le cas assez exceptionnel de l'University of Teesside (Middlesbrough, UK), où l'enseignement de base du calcul, depuis près de dix ans, se fait à la Keisler : l'objectif visé est d'éviter les embûches conceptuelles de l'approche traditionnelle tout en favorisant le développement de l'intuition. L'expérience semble positive et les étudiants paraissent acquérir tout aussi bien, sinon mieux, les habiletés calculatoires habituelles.

L'approche de Nelson a connu un impact considérable, et ce tout particulièrement en France, sans doute sous l'influence de Reeb et de l'équipe alsacienne d'analyse non standard. D'abord utilisée comme outil de développement de l'analyse et des mathématiques appliquées, la théorie IST de Nelson a vite été perçue comme fournissant un cadre conceptuel remarquable à des fins pédagogiques. Parmi la littérature très abondante publiée récemment sur le sujet, soulignons Antoine *et al.* (1992), Deledicq et Diener (1989), Deledicq (1990), Deledicq (1992), Deledicq (non daté), Gilbert (1992a), Lutz (1987) et Wallet (1992). L'article de Gilbert (1992a) cherche à répondre à la question : « L'analyse non standard peut-elle faciliter l'apprentissage de l'analyse ? » en examinant certaines difficultés célèbres de l'analyse classique dans le contexte de Nelson. Antoine *et al.* (1992) vise l'introduction de concepts non standard au lycée, tandis que Deledicq (non daté) est un cours facultatif en DEUG. Ce dernier document présente d'ailleurs une « hypothèse didactique » fort intéressante à propos de la gradation que permet la « Nouvelle et Simple Analyse » par l'introduction successive des trois axiomes d'IST, depuis un *calcul infinitésimal* portant essentiellement sur les ordres de grandeur jusqu'à l'*analyse infinitésimale* des limites et de la continuité.

CONCLUSION

> [...] non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. (Gödel, 1974)

Selon Mac Lane (1986, p. 155), les mathématiques ne sauraient être réduites ni à un formalisme pur ni à une accumulation d'idées empiriques, et consistent plutôt en « idées intuitives ou empiriques formalisables ». Les infinitésimaux constituent un exemple éloquent d'un tel point de vue, leur réhabilitation dans le cadre de l'analyse non standard mettant à la disposition du mathématicien des outils évocateurs et puissants. Leur acceptation se heurte cependant à certaines réticences — tout comme cela fut le cas, jadis, pour les nombres négatifs ou complexes — voire à des oppositions farouches — on se rappellera la polémique provoquée par la critique virulente de Bishop (1977). (On remarquera d'ailleurs la quasi-absence de l'analyse non standard des derniers congrès internationaux des mathématiciens.)

Il est bien connu que les techniques de l'analyse non standard se sont avérées fructueuses dans leurs applications en recherche, en particulier dans l'étude des bifurcations des systèmes dynamiques (Diener, 1984; Diener et Diener, 1989). Même si le nouveau cadre ne permet pas de démontrer « plus » que le cadre classique, car résultant d'une extension conservative, il provoque souvent une importante simplification conceptuelle et factuelle. (On pourrait reprendre ici, *mutatis mutandis*, les mots célèbres de Hadamard : « La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire » (Hadamard, 1959, p. 114)). Une telle simplification se retrouve par exemple dans l'utilisation faite de la « cohabitation » discret/continu dans l'élaboration par Harthong et Reeb d'un modèle du calcul sur ordinateur dans lequel le calcul en virgule fixe, à un ordre de grandeur donné, revient à travailler sur une portion de la droite naturelle, mais « vue de loin » (voir Diener et Diener, 1989).

Les renseignements que nous avons pu recueillir en préparant ce travail font ressortir une certaine utilisation de l'approche infinitésimale dans l'enseignement, mais peut-être dans une moindre mesure que d'aucuns le prévoyaient il y a une quinzaine d'années (il y a lieu de retenir le jugement en ce qui concerne l'impact éventuel du modèle de Nelson, source, mais depuis peu seulement, d'une importante activité pédagogique). Comment expliquer que le calcul infinitésimal n'ait pas été davantage l'occasion d'un renouvellement pédagogique ? L'ordinateur y est peut-être pour quelque chose, lui qui depuis un certain temps déjà monopolise une énergie considérable dans la problématique de l'enseignement quant à l'impact des logiciels graphiques ou symboliques. Sans doute également l'inertie inhérente au système éducatif est-elle si forte que tout espoir d'une répercussion rapide devient illusoire. Mais certains des obstacles sont vraisemblablement d'origine philosophique, de cette philosophie « implicite et quasi-spontanée qui accompagne nos discours et notre enseignement » (Wallet, 1992).

Nous laissons le mot de la fin à Georges Reeb, dont l'influence a été déterminante sur le développement récent de l'analyse non standard :

> [...] notre manière de parler aux élèves évoluera. Je me contenterai d'un exemple : alors que dans un passé récent il était raisonnable d'affirmer : « La méthode ε,δ de Weierstrass est *la* méthode qui permet de fonder l'analyse classique », il est clair que dorénavant on se montrera plus circonspect, on remplacera l'article défini *la* par le plus prudent article indéfini *une*. N'y aurait-il que cette seule implication sur notre enseignement, elle n'en serait pas moins très importante. (Reeb, 1981, p. 259-260)

NOTE

Ce texte est dédié, à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire de naissance, au professeur Shuichi Takahashi, mon mentor, qui très tôt s'est appliqué à faire connaître l'analyse non standard.

RÉFÉRENCES

Antoine, T. *et al.* (1992). *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal.* IREM de l'Université de Paris 7.

Artigue, M. *et al.* (1986). *Analyse non standard et enseignement.* Cahier de didactique des mathématiques n°. 15, IREM de l'Université de Paris 7.

Artmann, B. (1988). *The concept of number*. Chichester, UK: Ellis Horwood.

Barreau, H., & Harthong, J. (Ed.) (1989). *La mathématique non standard.* Paris: Éditions du CNRS.

Berkeley, G. (1734). The analyst; Or, a discourse addressed to an infidel mathematician. In A.C. Fraser (Ed.), *The works of George Berkeley, III* (pp. 17-60) (1901 ed.). Oxford: Clarendon Press.

Bishop, E. (1977). Review of *Elementary calculus*, by H.J. Keisler. *Bulletin of the American Mathematical Society, 83,* 205-208.

Davis, P.J., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. (Nonstandard Analysis, pp. 237-254). Boston: Birkhäuser.

Deledicq, A., & Diener, M. (1989). *Leçons de calcul infinitésimal.* Paris: Armand Colin.

Deledicq, A. (1990). Le (nouveau) calcul infinitésimal. *Bulletin de l'APMEP, 373,* 143-161.

Deledicq, A. (1992). De l'analyse non standard au calcul infinitésimal. In C. Hauchart et N. Rouche (éd.), *L'enseignement de l'analyse aux débutants* (pp. 55-86). Academia-Érasme.

Deledicq, A. (non daté). *Cours d'analyse infinitésimale élémentaire (non-standard).* En préparation. IREM de l'Université de Paris 7.

Diener, F., & Diener, M. (1989). Les applications de l'analyse non standard. *La Recherche, 20,* 68-83.

Diener, F., & Reeb, G. (1989). *Analyse non standard.* Paris: Hermann.

Diener, M. (1984). The canard unchained–Or how fast/slow dynamical systems bifurcate. *Mathematical Intelligencer, 6*(3), 38-49. (Version française in Barreau et Harthong (1989), pp. 401-42.)

Ebbinghaus, H.-D. *et al.* (1991). *Numbers.* New York: Springer-Verlag.

Fígols, R.S. (1990). *Calculo infinitesimal.* Mexico: IPN.

Foley, G.D. (1986). *Using infinitesimals to introduce limits and continuity in a community college calculus course.* Unpublished doctoral dissertation, University of Texas, Austin.

Gilbert, T. (1992). Qu'est-ce que l'analyse non standard? *Mathématique et pédagogie.*

Gilbert, T. (1992a). L'enseignement de la continuité et de la dérivabilité en analyse non standard. *Repères IREM.*

Gödel, K. (1974). Remarks on non-standard analysis. In S. Feferman et al. (Eds.), *Kurt Gödel. Collected works,* (Vol. II, p. 311) (1990 ed.). New York: Oxford University Press.

Hadamard, J. (1959). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris: Librairie scientifique Albert Blanchard.

Hatcher, W.S. (1982). Calculus is algebra. *American Mathematical Monthly, 89,* 362-370.

Henle, J.M., & Kleinberg, E.M. (1979). *Infinitesimal calculus.* Cambridge, MA: MIT Press.

Hoskins, R.F. (1990). *Standard and nonstandard analysis: Fundamental theory, techniques and applications.* Chichester, UK: Ellis Horwood.

Hurd, A.E., & Loeb, P.A. (1985). *An introduction to nonstandard real analysis.* New York: Academic Press.

Keisler, H.J. (1986) *Elementary calculus: An infinitesimal approach.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt. (First edition, 1976.)

Keisler, H.J. et al. (Eds.) (1979). *Selected papers of Abraham Robinson.* Vol. 2. *Nonstandard analysis and philosophy.* Yale University Press.

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum: Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

Levitz, H. (1974). Non-standard analysis: an exposition. *L'Enseignement mathématique, 20,* 9-32.

Lutz, R. (1987). Rêveries infinitésimales. *Gazette des mathématiciens, 34,* 79-87.

Luxemburg, W.A.J. (1979). Introduction to papers on nonstandard analysis and analysis (pp. xxxi-xxxix). In Keisler et al.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics: Form and function.* New York: Springer-Verlag.

Nelson, E. (1977). Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society, 83,* 1165-1198. (Version française in Barreau et Harthong (1989), 355-399.)

Reeb, G. (1979). *La mathématique non standard vieille de soixante ans?* IRMA, Strasbourg: Université Louis-Pasteur.

Reeb, G. (1981). Analyse non standard (Essai de vulgarisation). *Bulletin de l'APMEP 328,* 259-273.

Robert, A. (1984). Une approche naïve de l'analyse non-standard. *Dialectica 38,* 287-296.

Robert, A. (1985). *Analyse non standard.* Lausanne: Presses polytechniques romandes.

Robert, A. (1989). L'analyse non standard. In A. Jacob (éd.), *L'univers philosophique.* (*Encyclopédie philosophique universelle*, vol. 1, pp. 1049-1056). Paris: Presses Universitaires de France.

Robinson, A. (1974). *Non-standard analysis* (2nd. ed.). North-Holland Publ. Co. (First edition, 1966.)

Robinson, A. (1973). Numbers – What are they and what are they good for? *Yale Scientific Magazine, 47,* 14-16.

Rucker, R. (1982). *Infinity and the mind.* Boston: Birkhaüser.

Russell, B. (1903) *The principles of mathematics.* New York: W.W. Norton.

Sullivan, K. (1976). The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. *American Mathematical Monthly, 83,* 370-375.

Tall, D. (1980). Looking at graphs through microscopes, windows and telescopes. *Mathematical Gazette, 64,* 22-49.

Tall, D. (1981). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 16-21.

Wallet, G. (1992). Introduction au calcul leibnizien. *Bulletin de l'APMEP, 385,* 431-448.

Wattenberg, F. (1983). Unterricht im Infinitesimalkalkül: Erfahrungen in den USA. *Der Mathematikunterricht, 29*(4), 7-36.