

KARIM OUALKACHA

**ÉTUDE D'UN MODÈLE STATISTIQUE POUR LES
ROTATIONS**

**Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en statistique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M. Sc.)**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC**

SEPTEMBRE 2004

RÉSUMÉ

Les matrices de rotation sont utilisées pour décrire le mouvement d'un ensemble de points dans un système de coordonnées. En biomécanique, celles-ci servent à décrire la posture de l'articulation. Dans la pratique, la manipulation des matrices de rotation dans le cadre d'applications statistiques est souvent difficile. Cette difficulté nous a conduit à utiliser des quaternions. Dans ce mémoire, nous proposons l'étude d'un modèle statistique pour les matrices de rotations 3×3 , modèle appuyant sa présentation sur les quaternions.

Karim Oualkacha, étudiant

Louis-Paul Rivest, directeur

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Louis-Paul Rivest, professeur au département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval. Ses judicieux conseils, sa patience, sa disponibilité et la confiance qu'il m'a témoignée dès mon arrivée à l'Université Laval m'ont été d'une aide précieuse et ont assuré la réussite de ce projet.

Je tiens également à remercier Nathalie Vandal, qui a contribué à ce travail dans un projet de recherche sous la direction de Monsieur Louis-Paul Rivest. Ce travail a bénéficié d'un financement du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada et du Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES FIGURES	vi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. MATRICES DE ROTATION DANS \mathbb{R}^3 ET \mathbb{R}^4	4
1.1 Fonction exponentielle pour définir les matrices de rotation . . .	4
1.1.1 Matrices de rotation 3×3 , $SO(3)$	5
1.1.2 Construction d'une rotation dans $SO(4)$	6
1.1.3 Produit de deux matrices de rotation	8
1.2 Ecriture d'une matrice de rotation 3×3 en termes de quaternions	9
1.2.1 Produit de quaternions et produit de rotations de $SO(3)$	9
CHAPITRE II. ÉTUDE D'UN MODÈLE GÉNÉRAL POUR	
LES MATRICES DE ROTATION 3×3	13
2.1 Le modèle	13
2.1.1 Le modèle réduit	14
2.2 La constante de normalisation	14
2.2.1 Paramétrisation de Cayley de S^3_+	15
2.2.2 Paramétrisation de Watson de la sphère S^3	17
2.3 La simulation des données	18

2.4	Les cas limites	21
CHAPITRE III. ESTIMATION DES PARAMÈTRES		
DU MODÈLE		26
3.1	Calcul des moments associés à la densité $g_{M,\gamma}(r)$	27
3.2	Estimation des paramètres M et γ par la méthode des moments	30
3.3	Deux cas limites	40
3.4	Propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance de M et γ	43
CHAPITRE IV. ANALYSE DE DONNÉES		55
4.1	Présentation des données	55
4.2	Estimation des paramètres par la méthode des moments . . .	58
CONCLUSION		65
ANNEXE		66
BIBLIOGRAPHIE		73

LISTE DES FIGURES

3.1	Efficacité minimale, pour $\gamma_1 \geq 1$, de l'estimateur des moments pour m_2 . . .	52
3.2	Efficacité de l'estimateur des moments pour γ_3	53
4.3	Localisation et orientation des marqueurs dans la tâche de perçage . . .	56
4.4	Dispositif expérimental	57

INTRODUCTION

Une grande partie de nos mouvements, pour ne pas dire tous, est le résultat de rotations inter-segmentaires. En se raccourcissant pendant une contraction, nos muscles tirent sur les os qui sont, à leur tour, mis en mouvement autour d'une articulation. D'une façon générale, décrire théoriquement le mouvement d'un corps solide dans l'espace peut nous aider à comprendre plusieurs phénomènes physiques. Dans un premier temps, il faut souligner qu'un tel mouvement se décompose en deux parties distinctes : une translation et une rotation. La partie rotation est souvent modélisée à l'aide de matrices de rotation 3×3 . Les rotations sont utilisées en biomécanique pour décrire le mouvement des articulations. L'étude de la marche, ou "gait analysis", est un domaine d'étude où les rotations 3×3 jouent un rôle primordial, (Zatsorovsky, 1990). Les méthodes statistiques pour expliquer et analyser un tel mouvement, reposent sur des modèles paramétriques pour la distribution des matrices de rotation. La construction des fonctions de distribution pour les matrices de rotation a suscité jusqu'ici une attention limitée dans la littérature statistique. La distribution de Fisher-von Mises présentée par Downs (1972) est une famille exponentielle qui a été étudiée par Khatri & Mardia (1977), Prentice (1986), et Mardia & Jupp (2000). Un compte-rendu récent de la théorie pour ce modèle est donné par Chikuse (2002). Cependant, les caractéristiques de base de ce modèle mènent à des expressions compliquées, difficiles à évaluer. En outre, la simulation de rotations aléatoires suivant la distribution de Fisher von-Mises n'est pas une tâche simple. León,

Massé et Rivest (2003), ont essayé d'élargir la famille des modèles pour les rotations aléatoires dans $SO(3)$ avec une proposition qui donne des procédures statistiques relativement simples. Prentice (1986) a présenté les quaternions comme un outil statistique utile pour comparer des échantillons de rotations. Rancourt, Rivest et Asselin (2000) ont montré que la manipulation des matrices de rotation, effectuée dans le cadre d'applications statistiques, était beaucoup plus simple en utilisant les quaternions. Pour cette raison, nous allons proposer un modèle statistique pour les matrices de rotation 3×3 en fonction des quaternions.

Ce mémoire est consacré à l'étude de ce modèle statistique. Au chapitre 1, nous donnons d'abord une définition d'une matrice de rotation en général et nous rappelons des résultats importants concernant les représentations d'une matrice de rotation, par l'exponentielle d'une matrice antisymétrique et à l'aide de quaternions. Nous présentons au chapitre 2 le modèle et nous calculons la constante de normalisation en utilisant les paramétrisations de Cayley et de Watson pour la sphère unitaire de \mathfrak{R}^4 . Nous suggérons de plus une méthode de simulation de données et calculons la distribution dans deux cas limites. Le chapitre 3 porte sur le calcul des estimateurs des paramètres du modèle par la méthode des moments; il contient également une étude asymptotique des estimateurs obtenus par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle. Le chapitre 4 constitue la partie pratique de ce mémoire; il contient des résultats obtenus par l'analyse d'un jeu de données, permettant entre autres de décrire les variations de la pose d'un sujet visant des positions différentes sur une

cible à l'aide d'une perceuse. L'annexe est réservée aux démonstrations un peu longues et aux programmes Splus pour le calcul des estimations.

CHAPITRE I

MATRICES DE ROTATION DANS \mathfrak{R}^3 ET \mathfrak{R}^4

Ce chapitre donne des résultats généraux sur les matrices de rotations qui seront utilisés tout au long de ce mémoire. En général, une matrice $R, p \times p$, est une matrice de rotation dans \mathfrak{R}^p , si elle est orthogonale et si son déterminant est égal à 1, c'est à dire si

$$RR^t = I_p \quad \text{et} \quad \det(R) = 1, \quad (1.1)$$

où $\det(R)$ est le déterminant de R , R^t est la matrice transposée de R et I_p représente la matrice identité dans \mathfrak{R}^p . Notons que l'ensemble des rotations dans \mathfrak{R}^p est noté $SO(p)$. On dit qu'un corps solide tourne d'une position x vers une position y par rapport à l'origine, s'il existe une matrice 3×3 , R , vérifiant (1.1) telle que : $y = Rx$; dans ce cas, le corps a subi une rotation dans l'espace. Notons que $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ et $y = (y_1, y_2, y_3)^t$ sont deux vecteurs de \mathfrak{R}^3 .

1.1 Fonction exponentielle pour définir les matrices de rotation

Une des façons pour représenter une matrice de rotation dans $SO(p)$ est l'écriture en fonction de l'exponentielle d'une matrice antisymétrique (War-

ner (1983), p 84). En effet, pour toute matrice $R \in SO(p)$, il existe une matrice antisymétrique $p \times p$, A (c'est à dire, telle que $A^t = -A$) telle que :

$$\begin{aligned} R &= \exp(A) \\ &= I_p + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.1 Matrices de rotation 3×3 , $SO(3)$

Dans la dimension 3, toute matrice antisymétrique est équivalente à un vecteur de \mathfrak{R}^3 . En effet, si nous posons $\mathcal{S}(\cdot)$ comme étant une fonction définie de \mathfrak{R}^3 dans l'ensemble des matrices antisymétriques 3×3 par

$$\mathcal{S}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathfrak{R}^3$, il est clair que $\mathcal{S}(\cdot)$ est inversible, donc pour toute matrice antisymétrique A , 3×3 , il existe $a \in \mathfrak{R}^3$ tel que : $A = \mathcal{S}(a)$. Par suite, pour toute matrice $R \in SO(3)$, définie dans (1.2), nous avons

$$R = \exp(\mathcal{S}(a)).$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}(a)^i}{i!} \\ &= \cos(\|a\|)I_3 + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|}\mathcal{S}(a) + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2}aa^t \end{aligned} \quad (1.4)$$

et on dit que la rotation R est d'angle $\theta = \|a\|$, autour de l'axe de vecteur unitaire $u = a/\|a\|$. Notons que (1.4) découle du fait que,

$$\mathcal{S}^2(a) = aa^t - \|a\|^2 I_3.$$

On peut remarquer que $Ra = a$ et par suite le vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $a/\|a\|$. En terme de θ et u on peut écrire R comme

$$R = (\cos \theta)I_3 + (\sin \theta)\mathcal{S}(u) + (1 - \cos \theta)uu^t. \quad (1.5)$$

Étant donné une rotation R , on peut déterminer son axe et son angle. En effet, d'après (1.5), nous avons

$$\begin{aligned} \text{tr}(R) &= 3 \cos \theta + 1 - \cos \theta \\ &= 2 \cos \theta + 1. \end{aligned}$$

Par suite, l'angle de cette rotation est :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(R) - 1}{2}\right), \quad \theta \in [0, \pi];$$

de même pour l'axe de rotation, d'après (1.5) nous avons

$$\frac{R - R^t}{2} = (\sin \theta)\mathcal{S}(u),$$

d'où

$$u = \mathcal{S}^{-1}\left(\frac{1}{\sin \theta}(R - R^t)\right), \quad \theta \in (0, \pi),$$

où $\mathcal{S}^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $\mathcal{S}(\cdot)$ définie dans (1.3). Notons que $a = \theta u$ donne R de (1.4). En effet, nous avons $\|a\| = \theta \|u\| = \theta$, et ainsi,

$$\frac{a}{\|a\|} = \frac{a}{\theta} = u.$$

1.1.2 Construction d'une rotation dans $SO(4)$

Tel que mentionné au début de la section, nous pouvons représenter une matrice de rotation dans $SO(p)$ comme l'exponentielle d'une matrice anti-symétrique, voir (1.2). Nous étudions cette construction lorsque $p = 4$. La

matrice antisymétrique A , 4×4 , peut s'écrire sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a^t \\ a & \mathcal{S}(b) \end{pmatrix} = \left(\mathcal{S}_+(a+b)/2 + \mathcal{S}_-(a-b)/2 \right) \quad a, b \in \mathfrak{R}^3,$$

où \mathcal{S} est définie par (1.3), $\mathcal{S}_+(\cdot)$ et $\mathcal{S}_-(\cdot)$ sont des fonctions de \mathfrak{R}^3 dans l'ensemble des matrices antisymétriques 4×4 données par

$$\mathcal{S}_+(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x^t \\ x & \mathcal{S}(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_-(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x^t \\ x & -\mathcal{S}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

ceci pour tout $x \in \mathfrak{R}^3$. Ainsi, pour toute matrice de rotation R , 4×4 , il existe $a, b \in \mathfrak{R}^3$ tels que,

$$R = \exp \left(\mathcal{S}_+(a+b)/2 + \mathcal{S}_-(a-b)/2 \right). \quad (1.7)$$

Maintenant, nous voulons évaluer le terme à droite de l'égalité (1.7). Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. (*Lancaster et Tismenetsky (1985), page 329*)

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Si A et B commutent, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Notons que $\mathcal{S}_+(\cdot)$ et $\mathcal{S}_-(\cdot)$ commutent, c'est à dire que,

$$\mathcal{S}_+(x)\mathcal{S}_-(y) = \mathcal{S}_-(y)\mathcal{S}_+(x), \quad (1.8)$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{R}^3$, et que

$$\mathcal{S}_+(x)^2 = \mathcal{S}_-(x)^2 = -xx^t I_4. \quad (1.9)$$

En vertu du lemme 1 et de (1.8) nous avons,

$$R = \exp \left(S_+(a+b)/2 \right) \exp \left(S_-(a-b)/2 \right).$$

De plus, puisque $S_+(x)^2 = S_-(x)^2 = -xx^t I_4$, on montre que

$$\exp \left(S_+(a+b)/2 \right) = \left\{ \cos \left\| (a+b)/2 \right\| I_4 + \frac{\sin \left\| (a+b)/2 \right\|}{\left\| (a+b)/2 \right\|} S_+(a+b)/2 \right\},$$

et de même,

$$\exp \left(S_-(a-b)/2 \right) = \left\{ \cos \left\| (a-b)/2 \right\| I_4 + \frac{\sin \left\| (a-b)/2 \right\|}{\left\| (a-b)/2 \right\|} S_-(a-b)/2 \right\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \cos \left\| (a+b)/2 \right\| I_4 + \frac{\sin \left\| (a+b)/2 \right\|}{\left\| (a+b)/2 \right\|} S_+(a+b)/2 \right\} \quad (1.10) \\ &\times \left\{ \cos \left\| (a-b)/2 \right\| I_4 + \frac{\sin \left\| (a-b)/2 \right\|}{\left\| (a-b)/2 \right\|} S_-(a-b)/2 \right\}. \end{aligned}$$

1.1.3 Produit de deux matrices de rotation

Soient R_1 et R_2 deux éléments de $SO(p)$. Définissons R par : $R = R_1 R_2$.

Nous avons

$$RR^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = I_p \quad \text{et} \quad \det(R) = \det(R_1) \det(R_2) = 1,$$

et par conséquent, en vertu de la définition donnée par (1.1), le produit de deux rotations est une rotation et R est un élément de $SO(p)$. Ainsi, $SO(p)$ muni de la multiplication est un groupe non abélien (non commutatif).

1.2 Ecriture d'une matrice de rotation 3×3 en termes de quaternions

Toute matrice de rotation 3×3 peut être exprimée sous forme de quaternions. De façon générale, le quaternion représentant une rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire u est

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u^t \right), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Par ailleurs, en utilisant la représentation d'une rotation par l'exponentielle d'une matrice antisymétrique, nous avons vu précédemment que pour tout élément R de $SO(3)$ il existe a dans \mathfrak{R}^3 tel que

$$R = \cos(\|a\|)I + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|}S(a) + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2}aa^t, \quad \text{voir (1.10).}$$

Le quaternion associé à cette rotation est :

$$q = \left(\cos\left(\frac{\|a\|}{2}\right), \frac{\sin\left(\frac{\|a\|}{2}\right)}{\|a\|}a^t \right), \quad \|q\| = 1, \quad q \in S^3,$$

où S^3 est la sphère unitaire de \mathfrak{R}^4 .

1.2.1 Produit de quaternions et produit de rotations de $SO(3)$

Pour définir le produit de deux quaternions, nous allons définir un quaternion comme un vecteur de \mathfrak{R}^4 écrit sous la forme

$$q = t + xi + yj + zk,$$

où $(t, x, y, z)^t \in \mathfrak{R}^4$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 0, 1)$. Hamilton (1969) a défini une opération produit denotée "·" sur l'ensemble des quaternions de la façon suivante : $i \cdot j = k$, $i \cdot k = -j$, $j \cdot k = i$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i^2 = i \cdot i$. Sous forme vectorielle, le produit de deux quaternions quelconques est donné par :

$$\begin{aligned} q \cdot p &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 - p_4 q_4 \\ p_1 q_2 + p_2 q_1 - p_3 q_4 + p_4 q_3 \\ p_1 q_3 + p_2 q_4 + p_3 q_1 - p_4 q_2 \\ p_1 q_4 - p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_4 q_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons vérifier que

$$\begin{aligned} p \cdot q &= \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \\ &= P_+ q, \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} p \cdot q &= \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\ &= Q_- p. \end{aligned}$$

Il apparaît que

$$P_+ = p_1 I_4 + \mathcal{S}_+(p_2, p_3, p_4), \quad (1.11)$$

et

$$Q_- = q_1 I_4 + \mathcal{S}_-(q_2, q_3, q_4), \quad (1.12)$$

où $\mathcal{S}_+(\cdot)$ et $\mathcal{S}_-(\cdot)$ sont définies dans (1.6). Notons que P_+ et Q_- sont des rotations. Donc, les vecteurs P_+q et Q_-p sont des vecteurs unitaires.

Comme nous le savons, le produit de deux matrices de rotation 3×3 est une matrice de rotation 3×3 . On peut représenter cette matrice produit à l'aide de quaternions. Plus précisément, le quaternion représentant cette matrice produit est le produit des deux quaternions associés aux deux matrices multipliées. En effet, soient p et q les quaternions associés respectivement aux rotations R_1 et R_2 . On peut vérifier que la rotation produit $R_1 R_2$ est représentée par le quaternion $p.q = P_+q = Q_-p$, McCarthy (1990, p. 61).

Pour terminer cette section, nous allons montrer que toute rotation de $SO(4)$ peut s'exprimer en fonction de P_+ et Q_- . En effet, posons

$$s = \arccos(p_1) \frac{(p_2, p_3, p_4)^t}{\sqrt{1 - p_1^2}} \quad \text{et} \quad t = \arccos(q_1) \frac{(q_2, q_3, q_4)^t}{\sqrt{1 - q_1^2}},$$

En appliquant les fonctions $\exp(\mathcal{S}_+(\cdot))$ et $\exp(\mathcal{S}_-(\cdot))$ qui sont définies dans la section (1.1.2) aux points s et t respectivement. À l'aide de (1.11) et (1.12), nous avons

$$P_+ = \exp(\mathcal{S}_+(s)) \quad \text{et} \quad Q_- = \exp(\mathcal{S}_-(t)).$$

Ainsi, rappelons que P_+Q_- est un élément de $SO(4)$ et que s et t deux vecteurs de \mathfrak{R}^3 . Si nous posons $a = s+t$ et $b = s-t$, nous aurons $s = (a + b)/2$

et $t = (a - b)/2$ et par la suite nous retrouvons exactement la formule (1.10). On conclut donc, que toute matrice de rotation R de $SO(4)$ peut s'écrire sous forme

$$R = P_+ Q_-,$$

avec P_+ et Q_- deux matrices de rotation de $SO(4)$, définies comme dans (1.11) et (1.12) en fonction des quaternions p et q qui représentent des matrices de rotation de $SO(3)$.

Notons que

$$P_+ Q_- = Q_- P_+.$$

Le fait que P_+ et Q_- commutent vient du fait qu'elles s'expriment en fonction de $\mathcal{S}_+(\cdot)$ et $\mathcal{S}_-(\cdot)$ (voir (1.11) et (1.12)) et du fait que ces dernières commutent, voir (1.8). Ainsi, posons ${}^t p = (p_1, -p_2, -p_3, -p_4)^t$. Le vecteur ${}^t p$ est le quaternion associé à la matrice de rotation inverse de R_1 , R_1^t . Par suite $P_+^t q$ est le quaternion associé à $R_1^t R_2$, de plus, $P_+^t q = Q_-({}^t p)$, voir Prentice (1986).

CHAPITRE II

ÉTUDE D'UN MODÈLE GÉNÉRAL POUR LES MATRICES DE ROTATION 3×3

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle statistique général pour les matrices de rotation 3×3 . Nous commençons d'abord par la présentation du modèle, puis nous calculons la constante de normalisation. Une section est ensuite réservée aux simulations. Finalement, nous discutons des cas limites du modèle proposé.

2.1 Le modèle

Nous avons vu dans le premier chapitre que toute matrice de rotation 3×3 d'angle θ autour d'un vecteur unitaire u peut être exprimée sous forme de quaternion comme suit :

$$q = \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) u^t \right), \quad q \in S^3 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, \pi].$$

Le modèle proposé en terme de quaternions, avec tous ses paramètres (M, γ) est :

$$\begin{aligned} g_{M,\gamma}(r) &= [c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]^{-1} (M_1^t r)^{2\gamma_1} ((M_1^t r)^2 + (M_2^t r)^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} \\ &\times ((M_1^t r)^2 + (M_2^t r)^2 + (M_3^t r)^2)^{\gamma_3 - \gamma_2} \quad r \in S^3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où S^3 est la sphère unitaire de \mathfrak{R}^4 , $M = (M_1, M_2, M_3, M_4) \in SO(4)$, $M_i \in \mathfrak{R}^4$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathfrak{R}^3$ et $c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est une constante de normalisation, où γ_1, γ_2 et γ_3 sont positifs.

2.1.1 Le modèle réduit

Si r est distribué selon $g_{M,\gamma}$, alors $q = M^t r$ est distribué selon $g_{I_4,\gamma}$ et par suite nous pouvons parler du modèle réduit (cas où $M = I_4$) donné par :

$$\begin{aligned} g_\gamma(q) &= [c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]^{-1} q_1^{2\gamma_1} (q_1^2 + q_2^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} \\ &\times (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\gamma_3 - \gamma_2}, \quad q \in S^3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Notons que les deux modèles, le modèle complet et le modèle réduit ($M = I_4$) sont équivalents. Le fait de travailler avec le modèle réduit dans la section qui suit, nous facilite grandement les calculs pour déterminer la constante de normalisation.

2.2 La constante de normalisation

Nous voulons déterminer explicitement la constante de normalisation. Pour ce faire, nous allons évaluer le terme à droite de (2.2). Vu que g_γ est une densité, nous avons

$$\int_{S^3} g_\gamma(q) dq = 1.$$

Puisque g_γ est une fonction paire en chaque q_i , $i = 1, 2, 3, 4$, et en particulier en q_1 , elle est symétrique par rapport à l'origine. En vertu de (2.2), nous avons

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \int_{S^3} q_1^{2\gamma_1} (q_1^2 + q_2^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\gamma_3 - \gamma_2} dq \quad (2.3)$$

$$= 2 \int_{S_+^3} q_1^{2\gamma_1} (q_1^2 + q_2^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\gamma_3 - \gamma_2} dq. \quad (2.4)$$

où S_+^3 représente la demi-sphère des quaternions q tel que $q_1 > 0$.

2.2.1 Paramétrisation de Cayley de S_+^3

La transformation de Cayley, associée à tout vecteur s de \mathfrak{R}^3 , la rotation suivante

$$P = 2 [I_3 - \mathcal{S}(s)]^{-1} - I_3, \quad (2.5)$$

où $\mathcal{S}(\cdot)$ est donnée par (1.3). Nous pouvons vérifier facilement que cette transformation est inversible. Maintenant, soit $q \in S_+^3$ le quaternion associé à P défini dans (2.5). Nous pouvons écrire q de la façon suivante

$$q = \frac{(1, s')}{\sqrt{1 + s'ts}}, \quad (2.6)$$

où s est le vecteur associé à la rotation P par la transformation de Cayley donnée par (2.5). Notons (2.6) la paramétrisation de Cayley de S_+^3 . Pour tout q de S_+^3

$$s = \frac{1}{q_1} (q_2, q_3, q_4)^t \quad (2.7)$$

est le vecteur de \mathfrak{R}^3 associé à q en vertu de (2.6). Donc, nous effectuons ce changement de variable en déterminant la mesure invariante de S_+^3 , dq en fonction de ds (voir Annexe). Nous trouvons

$$dq = \frac{ds}{(1 + s^t s)^2} \quad (2.8)$$

et par suite

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2 \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_3 - \gamma_2}}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\gamma_3 + 2}} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Nous intégrons sur s_3 , en faisant le changement de variable $t_3 = s_3 / \sqrt{1 + s_1^2 + s_2^2}$.

Nous obtenons

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2 \int_{\mathfrak{R}^2} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1}}{(1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_2 + \frac{3}{2}}} \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{(1 + t_3^2)^{\gamma_3 + 2}} dt_3 ds_2 ds_1.$$

En utilisant la constante de normalisation de la densité t standard, nous obtenons alors

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{\Gamma(\gamma_3 + 2)} \int_{\mathfrak{R}} (1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{(1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_2 + \frac{3}{2}}} ds_2 ds_1.$$

De même, nous intégrons sur s_2 , en effectuant le changement de variable $t_2 = s_2 / \sqrt{1 + s_1^2}$ et en utilisant la constante de normalisation de la densité t standard. Nous obtenons encore

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2 \frac{\pi \Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \Gamma(\gamma_2 + 1)}{\Gamma(\gamma_3 + 2) \Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{(1 + s_1^2)^{\gamma_1 + 1}} ds_1. \quad (2.9)$$

Enfin, nous intégrons sur s_1 , en utilisant de nouveau la constante de normalisation de la densité t standard. Nous obtenons

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2 \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \Gamma(\gamma_2 + 1) \Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma_3 + 2) \Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2}) \Gamma(\gamma_1 + 1)}. \quad (2.10)$$

Il est à noter que si q est un quaternion aléatoire de loi $g_\gamma(q)$, le vecteur s de \mathfrak{R}^3 donné par (2.7) a pour densité

$$h_\gamma(s_1, s_2, s_3) = 2 [c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]^{-1} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_3 - \gamma_2}}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\gamma_3 + 2}}, \quad s \in \mathfrak{R}^3. \quad (2.11)$$

2.2.2 Paramétrisation de Watson de la sphère S^3

Une autre méthode pour déterminer la constante de normalisation est d'utiliser la paramétrisation des éléments de S^3 donnée par Watson (1983, p 44).

En général, en dimension p , pour tout $q \in S^p$, la sphère unitaire de \mathfrak{R}^p , cette paramétrisation est définie par

$$q_{p \times 1} = t \begin{pmatrix} 0_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix}_{p \times 1} + \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} u_{p-1 \times 1} \\ 0 \end{pmatrix}_{p \times 1}, \quad t \in [-1, 1], \quad u \in S^{p-1},$$

où S^{p-1} est la sphère unitaire de \mathfrak{R}^{p-1} . En particulier pour $p = 4$, nous avons

$$q = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1], \quad u = (u_1, u_2, u_3)^t \in S^2.$$

Watson (1983, p. 44) montre que

$$dq = \sqrt{1-t^2} dt du.$$

En faisant ce changement de variable, à l'aide de (2.3), nous aurons

$$\begin{aligned} c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= \int_{S^2} \int_{-1}^1 [u_1^2(1-t^2)]^{\gamma_1} [(u_1+u_2)(1-t^2)]^{\gamma_2-\gamma_1} \\ &\quad \times (1-t^2)^{\gamma_3-\gamma_2} (1-t^2)^{1/2} dt du \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\gamma_3+\frac{1}{2}} dt \int_{S^2} u_1^{\gamma_1} (u_1+u_2)^{\gamma_2-\gamma_1} du \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{\Gamma(\gamma_3 + 2)} \int_{S^2} u_1^{2\gamma_1} (u_1+u_2)^{\gamma_2-\gamma_1} du. \end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon pour u ($p = 3$). Nous avons

$$u = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1], \quad v = (v_1, v_2)^t \in S^1.$$

Ainsi,

$$c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{\pi \Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \Gamma(\gamma_2 + 1)}{\Gamma(\gamma_3 + 2) \Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \int_{S^1} v_1^{2\gamma_1} dv_1 dv_2.$$

Ensuite, on fait le changement de variable

$$v_1 = \cos \theta \quad v_2 = \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

À l'aide de la formule donnée dans (Abramowitz, et Stegun, p. 258, formule 6.1.49), on obtient

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta^{2\gamma_1} d\theta = \frac{\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_1 + 1)}. \quad (2.12)$$

Ceci redonne (2.10).

2.3 La simulation des données

À ce niveau du présent travail, nous avons présenté le modèle et nous avons déterminé la constante de normalisation. Cette section suggère une méthode permettant de simuler un vecteur aléatoire q distribué selon la densité g_γ . Pour ce faire, il suffit de simuler un vecteur s selon h_γ . Commençons par simuler s_1 à l'aide de sa densité marginale. Nous avons

$$h_1(s_1) = \int_{\mathfrak{R}^2} 2c_\gamma^{-1} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_3 - \gamma_2}}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\gamma_3 + 2}} ds_3 ds_2.$$

En effectuant le même changement de variable que nous avons fait pour s_3 et s_2 dans la section précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} h_1(s_1) &= c_\gamma^{-1} \pi \frac{\Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \Gamma(\gamma_2 + 1)}{\Gamma(\gamma_3 + 2) \Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \frac{1}{(1 + s_1^2)^{\gamma_1 + 1}} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} \frac{1}{(1 + s_1^2)^{\gamma_1 + 1}}. \end{aligned}$$

En posant

$$w_1 = \sqrt{2\gamma_1 + 1} s_1,$$

donc

$$s_1 = \frac{w_1}{\sqrt{2\gamma_1 + 1}} \quad \text{et} \quad \frac{ds_1}{dw_1} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_1 + 1}}.$$

En effectuant ce changement de variable, en remplaçant s_1 par w_1 dans la formule de $h_1(s_1)$, nous trouvons la densité de w_1

$$f(w_1) = \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{\sqrt{\pi(2\gamma_1 + 1)}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{w_1^2}{2\gamma_1 + 1})^{\gamma_1 + 1}}, \quad w_1 \in \mathfrak{R}$$

puisque $f(w_1)$ est une t à $2\gamma_1 + 1$ degrés de liberté. Nous obtenons donc s_1 en prenant

$$s_1 = \frac{w_1}{\sqrt{2\gamma_1 + 1}} \quad \text{où} \quad w_1 \sim t_{2\gamma_1 + 1}.$$

Maintenant nous cherchons à simuler s_2 sachant s_1 . Pour ce faire, nous avons la fonction conjointe de (s_1, s_2) est

$$\begin{aligned} h_{1,2}(s_1, s_2) &= \int_{\mathfrak{R}} 2c_\gamma^{-1} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1} (1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_3 - \gamma_2}}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\gamma_3 + 2}} ds_3 \\ &= \frac{\Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})\Gamma(\gamma_1 + 1)}{\pi\Gamma(\gamma_2 + 1)\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 - \gamma_1}}{(1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_2 + \frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Donc, la densité de $s_2|s_1$ est donnée par

$$h_{2|1}(s_2|s_1) = \frac{h_{1,2}(s_1, s_2)}{h_1(s_1)} = \frac{\Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_2 + 1)} \frac{(1 + s_1^2)^{\gamma_2 + 1}}{(1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_2 + \frac{3}{2}}} \quad (2.13)$$

En posant

$$w_2 = \frac{\sqrt{2(\gamma_2 + 1)}}{\sqrt{1 + s_1^2}} s_2,$$

nous aurons

$$s_2 = \frac{\sqrt{1 + s_1^2}}{\sqrt{2(\gamma_2 + 1)}} w_2 \quad \text{et} \quad \frac{ds_2}{dw_2} = \frac{\sqrt{1 + s_1^2}}{\sqrt{2(\gamma_2 + 1)}}.$$

En effectuant ce changement de variable dans (2.13), nous obtenons

$$f(w_2) = \frac{\Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi(\gamma_2 + 1)}\Gamma(\gamma_2 + 1)} \frac{1}{(1 + \frac{w_2^2}{2(\gamma_2 + 1)})^{\gamma_2 + \frac{3}{2}}}.$$

La densité de w_2 est une Student avec $2(\gamma_2 + 1)$ degrés de liberté. Nous obtenons donc s_2 en prenant

$$s_2 = \frac{\sqrt{1 + s_1^2}}{\sqrt{2(\gamma_2 + 1)}} w_2 \quad \text{où} \quad w_2 \sim t_{2(\gamma_2 + 1)}$$

Finalement, il ne reste qu'à simuler s_3 . Pour ce faire, nous allons simuler s_3 sachant s_2 et s_1 . On a

$$h_{3|1,2}(s_3|s_1, s_2) = \frac{h(s_1, s_2, s_3)}{h_{1,2}(s_1, s_2)} = \frac{\Gamma(\gamma_3 + 2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2})} \frac{(1 + s_1^2 + s_2^2)^{\gamma_3 + \frac{3}{2}}}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\gamma_3 + 2}}.$$

En posant

$$w_3 = \frac{\sqrt{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}}{\sqrt{1 + s_1^2 + s_2^2}} s_3,$$

donc

$$s_3 = \frac{\sqrt{1 + s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}} w_3 \quad \text{et} \quad \frac{ds_3}{dw_3} = \frac{\sqrt{1 + s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}}.$$

En faisant ce changement de variable, nous trouvons la densité de w_3

$$f(w_3) = \frac{\Gamma(\gamma_3 + 2)}{\sqrt{2\pi(\gamma_3 + \frac{3}{2})}\Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{w_3^2}{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})})^{\gamma_3 + 2}},$$

cette densité est une student avec $2(\gamma_3 + \frac{3}{2})$ degrés de liberté. Nous obtenons donc s_3 en prenant

$$s_3 = \frac{\sqrt{1 + s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}} w_3 \quad \text{où} \quad w_3 \sim t_{2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}.$$

Jusque là, nous avons simulé le vecteur s qui est distribué selon h . Il ne reste qu'à utiliser la relation (2.6) pour obtenir le quaternion q simulé.

Algorithme de simulation

étape 1 : générer $w_1 \sim t_{2\gamma_1+1}$, déduire $s_1 = \frac{w_1}{\sqrt{2\gamma_1+1}}$.

étape 2 : générer $w_2 \sim t_{2(\gamma_2+1)}$, déduire $s_2 = \frac{\sqrt{1+s_1^2}}{\sqrt{2(\gamma_2+1)}}w_2$.

étape 3 : $w_3 \sim t_{2(\gamma_3+\frac{3}{2})}$, déduire $s_3 = \frac{\sqrt{1+s_1^2+s_2^2}}{\sqrt{2(\gamma_3+\frac{3}{2})}}w_3$.

étape 4 : déduire $q = \frac{(\epsilon, s_1, s_2, s_3)}{\sqrt{1+s_1^2+s_2^2+s_3^2}}$, où ϵ est un signe aléatoire égal à ± 1 qui suit une loi uniforme.

Notons qu'à partir de (2.4) nous avons travaillé seulement sur l'hémisphère S_+^3 correspondant aux quaternions qui ont la première composante positive, à cause de la symétrie de g_γ par rapport à l'origine. Pour obtenir un quaternion aléatoire dans S^3 distribué selon $g_\gamma(q)$, nous avons donc donné un signe aléatoire à cette composante.

2.4 Les cas limites

Dans cette section, nous allons présenter deux principaux cas limites.

1 er cas : Répartition des quaternions centrés autour du point $(\pm 1, 0, 0, 0)^t$ de S^3 .

C'est le cas où q_1 est proche de ± 1 et les composantes q_2 , q_3 et q_4 proche

de zéro. En effet, selon la formule donnée dans (2.2), de $g_\gamma(q)$, lorsque les γ_i tendent vers l'infini, si q_1 n'est pas proche de ± 1 , nous aurons une distribution, $g_\gamma(q)$, nulle sur toute la sphère S^3 . Maintenant, supposons que

$$\gamma_1 = \alpha_1 \gamma', \quad \gamma_2 = \alpha_2 \gamma' \quad \text{et} \quad \gamma_3 = \alpha_3 \gamma'.$$

En vertu de la paramétrisation de Cayley, par symétrie, les quaternions centrés de S^3 , sont donnés par

$$q = \frac{(\pm 1, s)^t}{\sqrt{1 + s^t s}},$$

où $s \in \mathfrak{R}^3$. Les q voisins de $(\pm 1, 0, 0, 0)^t$ correspondent à des valeurs de s proches de 0_3 . Ainsi les quaternions dans un voisinage de $(\pm 1, 0, 0, 0)^t$ s'écrivent

$$q \approx (\pm 1, s)^t,$$

car $s^t s$ est négligeable devant s dans un voisinage de 0_3 . Dans ce cas, les quaternions se répartissent dans les deux hyper-plans, $(\pm 1, s_1, s_2, s_3)$, tangents à S^3 aux points $(\pm 1, 0, 0, 0)^t$ respectivement. La dispersion du nuage de points autour de $(\pm 1, 0, 0, 0)^t$ est donnée par la proposition suivante

Proposition 1. Lorsque γ' tend vers l'infini, nous avons, $|q_1|$ tend vers 1 en probabilité et

$$\sqrt{\gamma'}(q_2, q_3, q_4)^t \approx \sqrt{\gamma'}(s_1, s_2, s_3)^t \rightarrow N(0_3, \text{diag}(\frac{1}{2\alpha_j})_{1 \leq j \leq 3}).$$

Démonstration

En faisant le changement de variable, $\sqrt{\gamma'} s_j = t_j$, en vertu de (2.11), nous

avons,

$$h_{\gamma'}(t) = \frac{c_{\gamma'}^{-1} \left(1 + \frac{t_1^2}{\gamma'}\right)^{(\alpha_2 - \alpha_1)\gamma'} \left(1 + \frac{t_1^2 + t_2^2}{\gamma'}\right)^{(\alpha_3 - \alpha_2)\gamma'}}{\gamma'^{3/2} \left(1 + \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{\gamma'}\right)^{\alpha_3\gamma'}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{\gamma'}\right)^2}.$$

Or, lorsque γ' est grand, nous avons

$$1 + \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{\gamma'} \rightarrow 1.$$

Ainsi,

$$\left(1 + \frac{t}{\gamma'}\right)^{\alpha\gamma'} \approx \exp(\alpha t), \quad \text{pour tout } t.$$

Donc, en faisant tendre γ' vers l'infini. À l'aide du développement limité de la fonction $\Gamma(\cdot)$ donné dans (Fleming, 1965, Stirling formula p. 257 formule 6.1.37), nous aurons

$$\begin{aligned} h_{\gamma}(t) &= \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}{\pi^{3/2}} \frac{\exp((\alpha_2 - \alpha_1)t_1^2) \exp((\alpha_3 - \alpha_2)(t_1^2 + t_2^2))}{\exp(\alpha_3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2))} \\ &= \prod_{j=1}^3 \frac{\sqrt{2\alpha_j}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-2\alpha_j t_j^2}{2}\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

2 ème cas : Répartition des quaternions dans le voisinage d'un grand cercle de S^3 .

En vertu de (2.2), nous pouvons remarquer que si nous faisons tendre γ_2 et γ_3 vers l'infini, si $(q_1^2 + q_2^2)$ n'est pas proche de 1, nous aurons une distribution $g_{\gamma}(q)$, nulle sur toute la sphère S^3 . Donc, pour de grandes valeurs de γ_2 et γ_3 , nous allons étudier le cas où q_3 et q_4 , sont négligeables devant q_1 et q_2 ,

par suite les quaternions seront donnés par

$$q \approx \frac{(+1, s_1, 0, 0)}{\sqrt{1 + s_1^2}},$$

donc, nous pouvons conclure que les points se répartissent autour d'un grand cercle de S^3 . La dispersion du nuage de points autour ce grand cercle est donnée par la proposition suivante

Proposition 2. Posons $\gamma_2 = \alpha_2\gamma'$ et $\gamma_3 = \alpha_3\gamma'$. Lorsque γ' tend vers l'infini, nous avons

$$(q_1, q_2)^t \sim g_{12,\gamma},$$

où $g_{12,\gamma}$ est la densité marginale de q_1 et q_2 , donnée par

$$g_{12,\gamma}(q_1, q_2) = \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} q_1^{2\gamma_1}, \quad (q_1, q_2) \in S^1,$$

où S^1 est le cercle unitaire de \mathfrak{R}^2 . En plus

$$\sqrt{\gamma'}(q_3, q_4)^t \rightarrow N \left(0_2, \text{diag} \left(\frac{1}{2\alpha_j} \right)_{j=2,3} \right)$$

et les deux vecteurs, $(q_1, q_2)^t$ et $(q_3, q_4)^t$, sont asymptotiquement indépendants.

Démonstration

Supposons que $q_3 = x_3/\sqrt{\gamma'}$ et $q_4 = x_4/\sqrt{\gamma'}$. En vertu de (2.2), en remplaçant q_3 et q_4 par x_3 et x_4 , nous obtenons,

$$g_\gamma(q) = \frac{c_\gamma^{-1}}{\gamma'} q_1^{2\gamma_1} \left(1 - \frac{x_3^2 + x_4^2}{\gamma'} \right)^{\alpha_2\gamma' - \gamma_1} \left(1 - \frac{x_4^2}{\gamma'} \right)^{(\alpha_3 - \alpha_2)\gamma'}.$$

Nous procédons de la même façon que dans le premier cas, en faisant tendre γ' vers l'infini. Nous obtenons

$$\begin{aligned} g_\gamma(q) &= \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} q_1^{2\gamma_1} \frac{\sqrt{\alpha_2\alpha_3}}{\pi} \exp(-(x_3^2 + x_4^2)\alpha_2) \exp(-x_4^2(\alpha_3 - \alpha_2)) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} q_1^{2\gamma_1} \frac{\sqrt{\alpha_2\alpha_3}}{\pi} \exp(-\alpha_2 x_3^2 - \alpha_3 x_4^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'après (2.14), nous voyons que les deux vecteurs $(q_1, q_2)^t$ et $(q_3, q_4)^t$, sont indépendants. Ainsi,

$$\sqrt{\gamma}(q_3, q_4)^t \sim N \left(0_2, \text{diag} \left(\frac{1}{2\alpha_j} \right)_{j=2,3} \right).$$

Ensuite, en faisant le changement de variable

$$q_1 = \cos \theta, \quad q_2 = \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

à l'aide de (2.12), nous obtenons

$$\int_{\{(q_1, q_2)/q_1^2 + q_2^2 = 1\}} q_1^{2\gamma_1} dq_1 dq_2 = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma_1 + 1)}.$$

Donc, nous retrouvons $g_{12, \gamma'}(q_1, q_2)$ de la proposition, ce qui démontre le résultat.

□

CHAPITRE III

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'estimation des paramètres du modèle, M et γ , par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance. Ainsi, à l'aide de la méthode des moments, nous donnons des approches aux cas limites du chapitre II. Enfin, nous étudions l'efficacité des estimateurs obtenus par la méthode des moments.

Dans un tel modèle, les données recueillies sont des matrices de rotation qui peuvent aussi être exprimées sous forme de quaternions. Les quaternions observés sont

$$r_i = Mq_i, \quad \text{avec} \quad q_i \sim g_\gamma, \quad i = 1 \dots n \quad \text{et} \quad \gamma_3 \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0.$$

Les calculs de ce chapitre sont faits sous la condition que $\gamma_3 \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0$. Notons que la condition $\gamma_1 \geq 0$ est nécessaire pour que l'intégrale dans l'équation (2.9) soit convergente. Aussi, pour des raisons de régularité qu'on exposera plus tard, on suppose que les γ_i sont ordonnés dans l'ordre croissant des indices.

3.1 Calcul des moments associés à la densité

$$g_{M,\gamma}(r)$$

Soit $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^t \in S^3$, un quaternion aléatoire distribué selon $g_\gamma(q)$ et posons $r = Mq$, où $M \in SO(4)$. Nous allons réserver cette section au calcul des moments. Il est à noter qu'il est plus simple de travailler avec les trois variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= q_1^2, \\ Z_2 &= q_1^2 + q_2^2, \\ Z_3 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned}$$

D'abord, nous énonçons le résultat suivant :

Proposition 3. Quelques soient a, b et c dans \mathfrak{R} , nous avons

$$\begin{aligned} E(Z_1^a Z_2^b Z_3^c) &= E\{(q_1^2)^a (q_1^2 + q_2^2)^b (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^c\} \\ &= \frac{c(\gamma_1 + a, \gamma_2 + b + a, \gamma_3 + c + b + a)}{c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $E(\cdot)$ désigne l'espérance et $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ est donnée par (2.10)

La relation (3.1) de la Proposition 3 nous permet de calculer tous les moments dont nous aurons besoin par la suite. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} E(Z_3) &= E(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\ &= \frac{c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 + 1)}{c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \\ &= \frac{\gamma_3 + \frac{3}{2}}{\gamma_3 + 2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

De même

$$\begin{aligned} E(Z_2) &= \frac{c(\gamma_1, \gamma_2 + 1, \gamma_3 + 1)}{c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \\ &= \frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$E(Z_1) = \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)}. \quad (3.4)$$

De plus, les espérances des Z_i^2 , $i = 1, 2, 3$, sont données par

$$\begin{aligned} E(Z_1^2) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 2)(\gamma_1 + 1)}, \\ E(Z_2^2) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})}, \\ E(Z_3^2) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)}. \end{aligned}$$

En outre, l'espérance de $Z_i Z_j$, pour i différent de j , est

$$\begin{aligned} E(Z_1 Z_2) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 1)}, \\ E(Z_1 Z_3) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 1)}, \\ E(Z_2 Z_3) &= \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

Proposition 4. La matrice des moments théoriques d'ordre 2 de r , notée

par B_0 est donnée par :

$$\begin{aligned}
B_0 &= E(rr^t) \\
&= ME(qq^t)M^t \\
&= M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} M^t, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_1 = E[q_1^2], \lambda_2 = E[q_2^2], \lambda_3 = E[q_3^2], \lambda_4 = E[q_4^2] \quad \text{et} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0,$$

où

$$\lambda_1 = E[q_1^2] = \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)}, \tag{3.6}$$

$$\lambda_2 = E[q_2^2] = \frac{1}{2(\gamma_1 + 1)} \frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)}, \tag{3.7}$$

$$\lambda_3 = E[q_3^2] = \frac{1}{2(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \frac{(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_3 + 2)}, \tag{3.8}$$

$$\lambda_4 = E[q_4^2] = \frac{1}{2(\gamma_3 + 2)}. \tag{3.9}$$

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}
E(qq^t) &= (E[q_j q_k])_{1 \leq j \leq k \leq 4} \\
&= \text{diag} (E[q_j^2])_{1 \leq j \leq 4},
\end{aligned}$$

du fait que $E[q_j q_k] = 0$, pour $j \neq k$. En effet, en faisant le changement de variable, $p = (-q_1, q_2, q_3, q_4)^t$, le jacobien est égal à 1, et par suite

$$\begin{aligned} E[q_1 q_2] &= \int_{S^3} q_1 q_2 g_\gamma(q) dq \\ &= - \int_{S^3} p_1 p_2 g_\gamma(p) dp \\ &= -E[q_1 q_2]. \end{aligned}$$

Ceci est vraie quelque soient $j \neq k$, d'où $E[q_j q_k] = 0$. Ainsi, l'hypothèse $\gamma_3 \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0$, implique, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$. Maintenant, pour démontrer (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), nous allons évaluer $E(q_1^2)$, $E(q_2^2)$, $E(q_3^2)$ et $E(q_4^2)$ en fonction de γ_1 , γ_2 et γ_3 . Pour cela, nous remarquons que

$$\begin{aligned} E(q_1^2) &= E(Z_1), \\ E(q_2^2) &= E(Z_2) - E(Z_1), \\ E(q_3^2) &= E(Z_3) - E(Z_2), \\ E(q_4^2) &= 1 - E(Z_3), \end{aligned}$$

où $E(Z_i)$ est donné par (3.2), (3.3) et (3.4), d'où le résultat.

□

3.2 Estimation des paramètres M et γ par la méthode des moments

La démarche sous-jacente à la méthode des moments est la suivante : nous choisissons les paramètres (M, γ) tels que les moments théoriques d'ordre 2 soient égaux aux moments empiriques correspondant.

Les estimateurs de M et γ sont obtenus à l'aide de la matrice

$$\hat{B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i r_i^t.$$

Cette matrice est définie positive. En effet, soit $x \in \mathfrak{R}^4 - \{0_4\}$,

$$x^t \hat{B} x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^t r_i r_i^t x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^t r_i)^2 > 0,$$

d'où le résultat. Donc \hat{B} est diagonalisable et peut s'écrire sous la forme

$$\hat{B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i r_i^t = \hat{M} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_4 \end{pmatrix} \hat{M}^t, \quad (3.10)$$

où $\hat{M} = (\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \hat{M}_4)$ est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \hat{\lambda}_3 > \hat{\lambda}_4 > 0$. De plus la trace de \hat{B} est égale à 1 et par suite, $\sum_{i=1}^4 \hat{\lambda}_i = 1$. En posant le moment théorique (3.5) égal au moment empirique donné par (3.10), nous obtenons les estimateurs suivants : M est estimée par \hat{M} la matrice des vecteurs propres de \hat{B} , en vertu de la proposition 4, et les estimateurs de γ_1 , γ_2 et γ_3 sont définis implicitement par les équations

$$E(q_1^2) = \hat{\lambda}_1, \quad E(q_2^2) = \hat{\lambda}_2, \quad E(q_3^2) = \hat{\lambda}_3, \quad E(q_4^2) = \hat{\lambda}_4.$$

Ces équations sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \hat{\lambda}_1 = E(Z_1), \\ \hat{\psi}_2 &= \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = E(Z_2), \\ \hat{\psi}_3 &= \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 = E(Z_3). \end{aligned}$$

Posons $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3)^t$. Pour estimer γ , nous résolvons l'équation

$$\hat{\psi} = h(\gamma),$$

où $h(\gamma)$ est une fonction de \mathfrak{R}^3 dans \mathfrak{R}^3 définie par :

$$h(\gamma) = \begin{pmatrix} E(Z_1) \\ E(Z_2) \\ E(Z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)} \\ \frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)} \\ \frac{\gamma_3 + \frac{3}{2}}{\gamma_3 + 2} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où les espérances de Z_3 , Z_2 et Z_1 , sont données respectivement par (3.2), (3.3) et (3.4). Ensuite, nous avons

$$\hat{\gamma} = h^{-1}(\hat{\psi}).$$

Donc, pour estimer γ_3 , nous posons

$$E(Z_3) = \hat{\psi}_3. \quad (3.12)$$

En vertu de (3.2) et (3.12), nous avons

$$\hat{\psi}_3 = \frac{(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_3 + 2)}, \quad (3.13)$$

ce qui implique que

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \hat{\psi}_3} - 4 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_4} - 4 \right).$$

De même, l'estimateur de γ_2 est obtenu à l'aide de l'équation

$$E(Z_2) = \hat{\psi}_2. \quad (3.14)$$

D'après (3.3), (3.13) et (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_2 &= \frac{(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \\ &= \hat{\psi}_3 \frac{(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_2 + \frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{\hat{\psi}_2}{\hat{\psi}_3} = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 + \frac{3}{2}}, \quad (3.15)$$

ce qui implique que

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\psi}_2}{\hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_2} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4}{\hat{\lambda}_3} - 2 \right).$$

Enfin, l'estimateur de γ_1 est obtenu à l'aide de l'équation

$$E(Z_1) = \hat{\psi}_1. \quad (3.16)$$

En vertu de (3.4), (3.13), (3.15) et (3.16), nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \frac{(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 1)} \\ &= \hat{\psi}_3 \frac{\hat{\psi}_2 (\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\hat{\psi}_3 (\gamma_1 + 1)}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{\hat{\psi}_1}{\hat{\psi}_2} = \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2}}{\gamma_1 + 1},$$

ce qui implique que

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\psi}_2}{\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4}{\hat{\lambda}_2} - 2 \right).$$

Maintenant, nous allons déterminer la distribution asymptotique de $\hat{\gamma}$. Pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante, donnée par le lemme 7.3.1 de Chikuse (2002). Notons que, par construction, $\hat{\gamma}_3 \geq \hat{\gamma}_2 \geq \hat{\gamma}_1$.

Proposition 5. Pour B_0 et \hat{B} définies dans (3.5) et (3.10) respectivement, nous avons

$$\hat{B} = B_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} B_1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $B_1 = \sqrt{n}(\hat{B} - B_0)$ a une distribution asymptotique normale. En plus

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_j &= \lambda_j + \frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_{j1} + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \\ \hat{M}_j &= M_j + \frac{1}{\sqrt{n}}M_{j1} + O_p\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}\quad (3.17)$$

où λ_j et M_j , $j = 1, 2, 3, 4$, sont les valeurs propres et les vecteurs propres de B_0 , la matrice des moments théoriques d'ordre 2, et

$$\lambda_{j1} = M_j^t B_1 M_j, \quad M_{j1} = \sum_{k=1, k \neq j}^4 \frac{c_{k(j)}}{\lambda_k - \lambda_j} M_k \quad \text{et} \quad c_{k(j)} = -M_k^t B_1 M_j.$$

La distribution asymptotique de $\hat{\gamma}$, est donnée par la proposition suivante

Proposition 6. Lorsque n tend vers l'infini, nous avons

$$n^{1/2}(\hat{\gamma} - \gamma) \rightarrow N_3(0, \Sigma_\gamma),$$

avec

$$\Sigma_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{2(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 1)^2(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})^2(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{5}{2})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\gamma_3 + 2)^2(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_3 + 3)} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

et

$$et_j = \sqrt{\Sigma_\gamma(j, j)}/n, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

où et_j est l'écart-type type correspond à la $j^{\text{ème}}$ composante de $\hat{\gamma}$ et $\Sigma_\gamma(j, j)$, la $j^{\text{ème}}$ composante sur la diagonale de Σ_γ .

Démonstration

Il est clair que

$$\hat{M}_j^t \hat{B} \hat{M}_j = \hat{\lambda}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{M}_j^t r_i)^2, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Donc, en vertu de (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 = \hat{\psi}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_1^t r_i)^2 + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_{1i}^2 + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{1i} + O_p\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour $\hat{\psi}_2$ et $\hat{\psi}_3$, nous procédons de la même façon que pour $\hat{\psi}_1$. Nous trouvons

$$\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3)^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + O_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $Z_i = (q_{1i}^2, q_{2i}^2 + q_{1i}^2, q_{2i}^2 + q_{1i}^2 + q_{3i}^2)^t$. Ainsi, par le théorème de la limite centrale, nous avons que la loi asymptotique de $\hat{\psi}$ est une loi normale et :

$$n^{1/2} \left(\hat{\psi} - h(\gamma) \right) \rightarrow N_3(0_3, \text{Var}(Z)),$$

où $\text{Var}(Z) = (\text{cov}(Z_j, Z_k))_{j,k}$, avec $\text{cov}(Z_j, Z_k) = E(Z_j Z_k) - E(Z_j)E(Z_k)$, $j, k = 1, 2, 3$. Les éléments de la matrice $\text{Var}(Z)$ sont donnés à la section 3.1. D'autre part, nous savons que

$$\hat{\gamma} = h^{-1}(\hat{\psi}).$$

À l'aide du théorème de linéarisation de Slutsky, asymptotiquement, nous avons

$$n^{1/2}(\hat{\gamma} - \gamma) \rightarrow N_3 \left(0, \left(\frac{\partial}{\partial \psi} h^{-1}(\psi) \right)_{|\psi=h(\gamma)} \text{Var}(Z) \left(\frac{\partial}{\partial \psi} h^{-1}(\psi) \right)_{|\psi=h(\gamma)}^t \right),$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} h^{-1}(\psi)|_{\psi=h(\gamma)} &= [h'(h^{-1}(\psi))]^{-1}|_{\psi=h(\gamma)} \\ &= [h'(\gamma)]^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons en vertu de (3.11)

$$h'(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(\gamma_1+1)^2} \frac{(\gamma_3+\frac{3}{2})(\gamma_2+1)}{(\gamma_3+2)(\gamma_2+\frac{3}{2})} & \frac{1}{2(\gamma_2+\frac{3}{2})^2} \frac{(\gamma_3+\frac{3}{2})(\gamma_1+\frac{1}{2})}{(\gamma_3+2)(\gamma_1+1)} & \frac{1}{2(\gamma_3+2)^2} \frac{(\gamma_2+1)(\gamma_1+\frac{1}{2})}{(\gamma_2+\frac{3}{2})(\gamma_1+1)} \\ 0 & \frac{1}{2(\gamma_2+\frac{3}{2})^2} \frac{(\gamma_3+\frac{3}{2})}{(\gamma_3+2)} & \frac{1}{2(\gamma_3+2)^2} \frac{(\gamma_2+1)}{(\gamma_2+\frac{3}{2})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(\gamma_3+2)^2} \end{pmatrix}.$$

et

$$[h'(\gamma)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(\gamma_3+2)(\gamma_2+\frac{3}{2})(\gamma_1+1)^2}{(\gamma_3+\frac{3}{2})(\gamma_2+1)} & \frac{-2(\gamma_3+2)(\gamma_2+\frac{3}{2})(\gamma_1+1)(\gamma_1+\frac{1}{2})}{(\gamma_3+\frac{3}{2})(\gamma_2+1)} & 0 \\ 0 & \frac{2(\gamma_3+2)(\gamma_2+\frac{3}{2})^2}{(\gamma_3+\frac{3}{2})} & \frac{-2(\gamma_3+2)(\gamma_2+\frac{3}{2})(\gamma_2+1)}{(\gamma_3+\frac{3}{2})} \\ 0 & 0 & 2(\gamma_3+2)^2 \end{pmatrix}$$

En exprimant la matrice $Var(Z)$ en fonction de γ_1 , γ_2 et γ_3 , nous retrouvons (3.18), ce qui donne le résultat.

□

Maintenant, nous désirons étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur \hat{M} . En pratique, nous savons que si m est voisin de 0_4 ,

$$\begin{aligned} M \exp(\mathcal{S}(m)) &= M(I_4 + \mathcal{S}(m) + \frac{\mathcal{S}(m)^2}{2!} + \dots) \\ &= M(I_4 + \mathcal{S}(m) + \text{négligeable}) \\ &\approx M(I_4 + \mathcal{S}(m)), \end{aligned}$$

décrit les rotations autour de M , où $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)^t \in \mathfrak{R}^6$ et

$$\mathcal{S}(m) = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_1 & 0 & m_4 & m_5 \\ -m_2 & -m_4 & 0 & m_6 \\ -m_3 & -m_5 & -m_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, nous avons

$$M^t \hat{M} = I_4 + \mathcal{S}(\hat{m}), \quad (3.20)$$

où $\hat{m} = (\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3, \hat{m}_4, \hat{m}_5, \hat{m}_6) \in \mathfrak{R}^6$, mesure l'écart entre \hat{M} et M . Nous allons déterminer la distribution asymptotique des composantes du vecteur \hat{m} . Pour cela, nous nous servons de la proposition suivante :

Proposition 7. Pour \hat{m} défini dans (3.20), lorsque n tend vers l'infini, nous avons

$$n^{1/2} \hat{m} \sim N_6(0_6, \Sigma_m),$$

où

$$\Sigma_m = \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{2(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)\gamma_1^2} \\ \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{2(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{5}{2}) \left[\frac{(\gamma_1 + 1)}{2} - (\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1) \right]^2} \\ \frac{(\gamma_3 + 2)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{2(\gamma_3 + 3) \left[\frac{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})}{2} - (\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \right]^2} \\ \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})(\gamma_3 + 2)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{5}{2})(\gamma_2 - \gamma_1)^2} \\ \frac{(\gamma_3 + 2)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)}{(\gamma_3 + 3) \left[(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2}) - (\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2}) \right]^2} \\ \frac{(\gamma_3 + 2)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})}{(\gamma_3 + 3)(\gamma_3 - \gamma_2)^2} \end{array} \right)_{6 \times 6}. \quad (3.21)$$

Démonstration

À l'aide de (3.17), de la proposition 5 et de (3.20), nous vérifions que

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \\ \hat{m}_4 \\ \hat{m}_5 \\ \hat{m}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{M_2^t(B_1/\sqrt{n})M_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{M_3^t(B_1/\sqrt{n})M_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ \frac{M_4^t(B_1/\sqrt{n})M_1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ \frac{M_3^t(B_1/\sqrt{n})M_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \\ \frac{M_4^t(B_1/\sqrt{n})M_2}{\lambda_4 - \lambda_2} \\ \frac{M_4^t(B_1/\sqrt{n})M_3}{\lambda_4 - \lambda_3} \end{pmatrix}_{6 \times 1}.$$

Or

$$\begin{aligned} M_j^t(B_1/\sqrt{n})M_k &= M_j^t(\hat{B} - \hat{B}_0)M_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_j^t r_i r_i^t M_k + M_j^t M \text{diag}(\lambda_i) M^t M_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_{ji} q_{ki}. \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons approximer le vecteur \hat{m} comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \\ \hat{m}_4 \\ \hat{m}_5 \\ \hat{m}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \end{pmatrix}_{6 \times 6} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} q_{2i} q_{1i} \\ q_{3i} q_{1i} \\ q_{4i} q_{1i} \\ q_{3i} q_{2i} \\ q_{4i} q_{2i} \\ q_{4i} q_{3i} \end{pmatrix}_{6 \times 1}.$$

Par le théorème de linéarisation de Slutsky et le théorème de la limite centrale, nous obtenons

$$n^{1/2} \hat{m} \sim N_6(0_6, \Sigma_m),$$

où

$$\Sigma_m = \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \end{pmatrix}_{6 \times 6} \text{Var} \begin{pmatrix} q_2 q_1 \\ q_3 q_1 \\ q_4 q_1 \\ q_3 q_2 \\ q_4 q_2 \\ q_4 q_3 \end{pmatrix}_{6 \times 6} \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \end{pmatrix}_{6 \times 6}. \quad (3.22)$$

Nous allons déterminer les composantes de la matrice de variance-covariance du vecteur $(q_2 q_1, q_3 q_1, q_4 q_1, q_3 q_2, q_4 q_2, q_4 q_3)^t$. Cette matrice est diagonale, du fait que

$$\text{Cov}(q_j q_k, q_l q_s) = 0, \quad \text{pour tout } (j, k) \neq (l, s).$$

Donc, il reste à déterminer les termes de la diagonale, qui sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(q_j q_k) &= E(q_j^2 q_k^2) - [E(q_j q_k)]^2 \\ &= E(q_j^2 q_k^2)_{k < j}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \text{ et } k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Pour ce faire, nous avons

$$\begin{aligned} E(q_2^2 q_1^2) &= E(Z_2 Z_1) - E(Z_1^2), \\ E(q_3^2 q_1^2) &= E(Z_3 Z_1) - E(Z_2 Z_1), \\ E(q_4^2 q_1^2) &= E(Z_1) - E(Z_3 Z_1), \\ E(q_3^2 q_2^2) &= E(Z_3 Z_2) - E(Z_3 Z_1) - E(Z_2^2) + E(Z_2 Z_1), \\ E(q_4^2 q_2^2) &= E(Z_2) - E(Z_1) - E[Z_3 Z_2] + E(Z_3 Z_1), \\ E(q_4^2 q_3^2) &= E(Z_3) - E(Z_2) - E(Z_3^2) + E(Z_3 Z_2), \end{aligned}$$

où $E(Z_j)$, $E(Z_j^2)$ et $E(Z_j Z_k)$ sont déterminés en fonction de γ_1 , γ_2 et γ_3 dans la section 3.1. Ainsi, nous remplaçons les λ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, par leurs valeurs en fonction des γ_j , $j = 1, 2, 3$ dans (3.22), (voir Annexe), nous retrouvons Σ_m de la proposition 7.

□

3.3 Deux cas limites

Cette section examine une approche des cas limites dont nous avons discutés dans la section 2.4.

1 er cas :

$\hat{\lambda}_1$ proche de 1 et $\hat{\lambda}_2 \simeq \hat{\lambda}_3 \simeq \hat{\lambda}_4 \simeq 0$. Cela signifie que il y a peu de variation.

En effet, lorsque les r_i sont presque égaux,

$$r_1 \simeq r_2 \simeq \dots \simeq r_n \simeq_{\pm}^+ M_1,$$

où M_1 est un vecteur unitaire, fixe de \mathfrak{R}^4 . Nous aurons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i r_i^t \simeq M_1 M_1^t.$$

Il en découle que les quaternions r_i , sont répartis autour des deux points, $\pm M_1 \in S^3$. Nous pouvons parler de la dispersion du nuage des points dans les deux hyperplans tangents à la sphère S^3 aux points $\pm M_1$ (voir section 2.4). C'est le premier cas limite, où les γ_j , $j = 1, 2, 3$, sont grands.

2 ème cas :

$\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ sont non négligeables et $\hat{\lambda}_3 \simeq \hat{\lambda}_4 \simeq 0$. Dans ce cas, les quaternions

r_i , se répartissent autour d'un grand cercle de S^3 généré par \hat{M}_1 et \hat{M}_2 et ils s'écrivent d'après Rivest(2001), section 2.2, comme suit

$$\begin{aligned} r_i &\simeq \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\hat{M}_1 + \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\hat{M}_2 \\ &= \left[\hat{M}_1\right]_+ \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \hat{\mu} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec

$$\left[\hat{M}_1\right]_+ = \hat{M}_{11}I_4 + \mathcal{S}_+(\hat{M}_{21}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{41}),$$

où $\mathcal{S}_+(\cdot)$ est définie dans (1.6) et $\hat{\mu}$ vérifie l'équation suivante

$$\left[\hat{M}_1\right]_+^t \hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mu} \end{pmatrix}^t. \quad (3.23)$$

Par suite, nous pouvons conclure que les rotations $R_i \in SO(3)$, associées aux quaternions r_i , obéissent au modèle d'axe fixe, voir Rivest(2001). De plus, les R_i sont de la forme

$$R_i = R_0 R(\theta_i, \hat{\mu}). \quad (3.24)$$

où R_0 est la rotation moyenne associée à \hat{M}_1 et $R(\theta_i, \hat{\mu})$ est une rotation d'angle $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ autour de l'axe $\hat{\mu}$. À la section 4, nous allons voir que l'on peut interpréter $\hat{\mu}$ comme l'axe de rotation dans le système de coordonnées locales et θ_i comme l'angle qui caractérise la posture du membre à l'étude lors de la i ème mesure. Ce deuxième cas se produit lorsque γ_1 est beaucoup plus petit que γ_2 et γ_3 qui sont grands. Maintenant, après avoir déterminé l'axe $\hat{\mu}$, pour décrire plus précisément la variabilité du mouvement, nous allons déterminer la loi de θ_i . Les angles θ_i décrivent alors la variabilité de r_i autour de \hat{M}_1 . Tel que vu à la proposition 2 de la section 2.4, la densité de $\theta_i/2$ est

donnée en fonction de γ_1 par

$$g_{12,\gamma_1}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2\gamma_1}.$$

Par suite, du fait que $(1 + \cos(\theta))/2 = \cos^2(\theta/2)$, alors, la densité de θ est donnée par

$$g_{12,\gamma_1}(\theta) = \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2^{\gamma_1+1}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} [1 + \cos(\theta)]^{\gamma_1}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

D'après (Jammalamadaka & SenGupta, 2001, p. 51), cette fonction est une densité pour la loi bêta circulaire de paramètres $(\gamma_1 + 1/2, 1/2)$. Donc pour un réel a , tel que $0 < a < \pi$, la probabilité $Pr\{-a \leq \theta \leq a\}$, peut être exprimée en terme de $F_{2\gamma_1+1}$, la densité t avec $2\gamma_1 + 1$ degrés de liberté. En effet,

$$Pr\{-a \leq \theta \leq a\} = \int_{-a}^a \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)}{2^{\gamma_1+1}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})} [1 + \cos(\theta)]^{\gamma_1} d\theta.$$

Posons $x = \sin(\theta)/[1 + \cos(\theta)]$, donc $dx = d\theta/[1 + \cos(\theta)]$, puisque $1 + x^2 = 2/[1 + \cos(\theta)]$. Après quelques manipulations, nous aurons

$$\begin{aligned} Pr\{-a \leq \theta \leq a\} &= F_{2\gamma_1+1}\left(\sqrt{\gamma_1}\frac{\sin a}{1 + \cos a}\right) - F_{2\gamma_1+1}\left(-\sqrt{\gamma_1}\frac{\sin a}{1 + \cos a}\right) \\ &= 2F_{2\gamma_1+1}\left(\sqrt{\gamma_1}\frac{\sin a}{1 + \cos a}\right) - 1. \end{aligned}$$

Donc, la valeur de a pour laquelle, la probabilité soit égale à $1 - \alpha$ est donnée par

$$a = \arccos\left(\frac{2}{1 + \left[\gamma_1^{-1} F_{2\gamma_1+1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2\right]} - 1\right). \quad (3.25)$$

En effet, supposons que

$$1 - \alpha = 2F_{2\gamma_1+1}\left(\sqrt{\gamma_1}\frac{\sin a}{1 + \cos a}\right) - 1.$$

Alors

$$F_{2\gamma_1+1}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\gamma_1} \frac{\sin a}{1 + \cos a},$$

par suite, en élevant au carré et en ajoutant 1 des deux côtés de l'équation ci-dessus, nous aurons

$$\begin{aligned} 1 + \gamma_1^{-1} \left[F_{2\gamma_1+1}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 &= 1 + \frac{\sin^2 a}{(1 + \cos a)^2} \\ &= \frac{2}{1 + \cos a}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3.4 Propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance de M et γ

Nous allons maintenant présenter une étude asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour $M \in SO(4)$ et $\gamma \in \mathfrak{R}^3$. Pour réaliser cette étude, nous aurons besoin de la matrice d'information de Fisher, dénotée par $i(M, \gamma)$.

La matrice d'information de Fisher joue un rôle important dans la théorie asymptotique. Dans notre modèle, elle est définie par

$$i(M, \gamma) = \begin{pmatrix} i_{\gamma\gamma} & i_{\gamma m} \\ i_{m\gamma} & i_{mm} \end{pmatrix},$$

avec m un vecteur de \mathfrak{R}^6 associé à M par l'équation

$$M = \exp(\mathcal{S}(m)),$$

et

$$i_{\gamma\gamma} = E(U_\gamma U_\gamma^t), \quad i_{mm} = E(U_m U_m^t) \quad \text{et} \quad i_{m\gamma} = i_{\gamma m} = E(U_m U_\gamma^t),$$

où U_γ et U_m sont les vecteurs scores, c'est à dire les dérivées partielles de $l(M, \gamma)$ par rapport à γ et m respectivement, et $l(M, \gamma)$ est le log de la vraisemblance du modèle. Cette fonction est donnée par

$$\begin{aligned} l(M, \gamma) = & -n \log[c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)] + \sum_{i=1}^n \left(\gamma_1 \log [(M_1^t r_{(i)})^2] + (\gamma_2 - \gamma_1) \log [(M_1^t r_{(i)})^2 + (M_2^t r_{(i)})^2] \right. \\ & \left. + (\gamma_3 - \gamma_2) \log [(M_1^t r_{(i)})^2 + (M_2^t r_{(i)})^2 + (M_3^t r_{(i)})^2] \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $r_{(i)} = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i})^t$, $i = 1, \dots, n$, sont les observations.

Proposition 8. La matrice d'information de Fisher pour M et γ est donnée par

$$i(M, \gamma) = \begin{pmatrix} i_{\gamma\gamma} & i_{\gamma m} \\ i_{m\gamma} & i_{mm} \end{pmatrix},$$

où

$$i_{\gamma\gamma} = -n \operatorname{diag} [\gamma(j, j)]_{1 \leq j \leq 3},$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma(1, 1) &= \Psi'(\gamma_1 + 1) - \Psi'(\gamma_1 + \frac{1}{2}), \\ \gamma(2, 2) &= \Psi'(\gamma_2 + \frac{3}{2}) - \Psi'(\gamma_2 + 1), \\ \gamma(3, 3) &= \Psi'(\gamma_3 + 2) - \Psi'(\gamma_3 + \frac{3}{2}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $\Psi'(\cdot)$ est la fonction tri-gamma, la dérivée de la fonction di-gamma, $\Psi(\cdot)$,
 où $\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \log(\Gamma(x))$; de plus

$$i_{mm} = n \text{diag} [m(j, j)]_{1 \leq j \leq 6},$$

où

$$\begin{aligned} m(1, 1) &= \frac{4\gamma_1^2}{2\gamma_1 - 1}, \\ m(2, 2) &= \frac{2}{\gamma_2} \left[\frac{\gamma_1^3}{\gamma_1 - \frac{1}{2}} + (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2}}{\gamma_1 + 1} + 2\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) \right], \\ m(3, 3) &= \frac{2(\gamma_2 + \frac{1}{2})}{\gamma_2(\gamma_3 + \frac{1}{2})} \left[\frac{\gamma_1^3}{\gamma_1 - \frac{1}{2}} + (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{(\gamma_1 + 1)} + 2\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) \right] \\ &\quad + \frac{4}{(\gamma_3 + \frac{1}{2})} \left[2\gamma_1(\gamma_3 - \gamma_2) + (\gamma_3 - \gamma_2)^2 \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})} + 2(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_2) \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2}}{\gamma_1 + 1} \right], \\ m(4, 4) &= \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{(\gamma_1 + 1)\gamma_2}, \\ m(5, 5) &= \frac{1}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_3 + \frac{1}{2})} \left[(\gamma_2 - \gamma_1)^2 \frac{\gamma_2 + \frac{1}{2}}{\gamma_2} + (\gamma_3 - \gamma_2)^2 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 + \frac{3}{2}} + 2(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_2) \right], \\ m(6, 6) &= \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)^2}{(\gamma_3 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$$i_{\gamma m} = i_{m\gamma}^t = 0.$$

Démonstration

D'abord, nous allons évaluer l'information de Fisher de γ , en calculant l'espérance de la dérivée seconde de la log-vraisemblance. Pour cela, rappelons nous que

$$\begin{aligned} \log[c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)] &= \log \left[2\pi^{\frac{3}{2}} \right] + \log \left[\frac{\Gamma(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{\Gamma(\gamma_3 + 2)} \right] \\ &\quad + \log \left[\frac{\Gamma(\gamma_2 + 1)}{\Gamma(\gamma_2 + \frac{3}{2})} \right] + \log \left[\frac{\Gamma(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma_1 + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En plus, l'information de Fisher de γ , en fonction de la dérivée seconde de la log-vraisemblance est donnée par

$$i_{\gamma\gamma} = -diag \left(E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \gamma_j^2} l(M, \gamma) \right\} \right)_{j=1,2,3}.$$

En vertu de (3.26) et de (3.29), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \gamma_1^2} l(M, \gamma) &= -n \left\{ \log [\Gamma(\gamma_1 + 1)]'' - \log \left[\Gamma\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right) \right]'' \right\} \\ &= -n \left\{ \Psi'(\gamma_1 + 1) - \Psi'\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \gamma_2^2} l(M, \gamma) &= -n \left\{ \Psi'\left(\gamma_2 + \frac{3}{2}\right) - \Psi'(\gamma_2 + 1) \right\}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma_3^2} l(M, \gamma) &= -n \left\{ \Psi'(\gamma_3 + 2) - \Psi'\left(\gamma_3 + \frac{3}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Donc, nous retrouvons $i_{\gamma\gamma}$ de la proposition.

Maintenant, nous allons déterminer le vecteur score pour M . Pour cela, sans perdre de généralité, nous supposons que la vraie valeur de M est I_4 . Notons que la rotation au voisinage de I_4 peut être donnée par

$$M = I_4 + \mathcal{S}(m), \quad m \in \mathfrak{R}^6.$$

Donc, le vecteur score pour M , U_m , est le vecteur des coefficients des composantes de m dans le développement limité de $l(M, \gamma)$ au voisinage de I_4 . Ce développement est donné par

$$l(M, \gamma) = l(I_4, \gamma) + U_m^t m + o_p(m). \quad (3.30)$$

Or, puisque

$$M_1^t r = \{(I_4 + \mathcal{S}(m))e_1\}^t r = r_1 - m_1 r_2 - m_2 r_3 - m_3 r_4,$$

donc

$$(M_1^t r)^2 = r_1^2 - 2m_1 r_1 r_2 - 2m_2 r_1 r_3 - 2m_3 r_1 r_4 + o_p(m).$$

De même, nous aurons

$$(M_2^t r)^2 = r_2^2 + 2m_1 r_2 r_1 - 2m_4 r_2 r_3 - 2m_5 r_2 r_4 + o_p(m),$$

et

$$(M_3^t r)^2 = r_3^2 + 2m_2 r_3 r_1 + 2m_4 r_3 r_2 - 2m_6 r_3 r_4 + o_p(m).$$

Par suite, en utilisant le développement limité, $\log(1+x) = x$, au voisinage de 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} \log [(M_1^t r)^2] &= \log \left\{ r_1^2 \left[1 + \frac{-2m_1 r_1 r_2 - 2m_2 r_1 r_3 - 2m_3 r_1 r_4 + o_p(m)}{r_1^2} \right] \right\} \\ &= \log(r_1^2) - 2m_1 \frac{r_2}{r_1} - 2m_2 \frac{r_3}{r_1} - 2m_3 \frac{r_4}{r_1} + o_p(m). \end{aligned}$$

De même, nous aurons

$$\begin{aligned} \log [(M_1^t r)^2 + (M_2^t r)^2] &= \log(r_1^2 + r_2^2) - 2m_2 \frac{r_1 r_3}{r_1^2 + r_2^2} - 2m_3 \frac{r_1 r_4}{r_1^2 + r_2^2} \\ &\quad - 2m_4 \frac{r_2 r_3}{r_1^2 + r_2^2} - 2m_5 \frac{r_2 r_4}{r_1^2 + r_2^2} + o_p(m), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \log [(M_1^t r)^2 + (M_2^t r)^2 + (M_3^t r)^2] &= \log(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 2m_3 \frac{r_1 r_4}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \\ &\quad - 2m_5 \frac{r_2 r_4}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} - 2m_6 \frac{r_3 r_4}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} + o_p(m), \end{aligned}$$

en remplaçant les termes à droite des équations ci-dessus dans $l(M, \gamma)$ définie par (3.26). De plus, en vertu de (3.30), nous obtenons

$$U_m = -2 \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \gamma_1 \frac{r_{2i}}{r_{1i}} \\ \gamma_1 \frac{r_{3i}}{r_{1i}} + (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{r_{1i} r_{3i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2} \\ \gamma_1 \frac{r_{4i}}{r_{1i}} + (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{r_{1i} r_{4i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2} + (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{r_{1i} r_{4i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2} \\ (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{r_{2i} r_{3i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2} \\ (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{r_{2i} r_{4i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2} + (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{r_{2i} r_{4i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2} \\ (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{r_{2i} r_{4i}}{r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2} \end{pmatrix}_{6 \times 1}. \quad (3.31)$$

Maintenant, nous allons évaluer les composantes de la matrice i_{mm} . Pour cela, notons U_m^j , la j ème composante de U_m . Nous pouvons vérifier facilement que

$$E(U_m^j U_m^k) = 0, \quad \text{pour } j \neq k.$$

Donc

$$\begin{aligned} i_{mm} &= (E [U_m^j U_m^k])_{j,k} \\ &= \text{diag} (E [(U_m^j)^2])_{6 \times 6}. \end{aligned}$$

En évaluant les espérances $E [(U_m^j)^2]$, pour $j = 1, \dots, 6$, (voir Annexe), nous obtenons la matrice i_{mm} de la Proposition 8. Maintenant, nous allons montrer que

$$i_{\gamma m} = E(U_\gamma U_M^t) = i_{m\gamma}^t = 0.$$

Pour ce faire, nous avons besoin de l'expression explicite de U_γ , le vecteur score pour γ , qui est défini comme le vecteur des coefficients des composantes du vecteur $(\gamma - \gamma_0)$ dans le développement limité de $l(I_4, \gamma)$ au voisinage de $\gamma_0 = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^t$. Ce développement est donné par

$$l(I_4, \gamma) = l(I_4, \gamma_0) + (\gamma - \gamma_0)^t U_\gamma + O_p(\gamma - \gamma_0). \quad (3.32)$$

Or,

$$\begin{aligned}
 l(I_4, \gamma) - l(I_4, \gamma_0) &= -n(\gamma - \gamma_0)^t \frac{\partial}{\partial \gamma} \log(c_\gamma) + (\gamma_1 - \gamma_{10}) \sum_{i=1}^n [\log(r_{1i}^2) - \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2)] \\
 &\quad + (\gamma_2 - \gamma_{20}) \sum_{i=1}^n [\log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2) - \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2)] \\
 &\quad + (\gamma_3 - \gamma_{30}) \sum_{i=1}^n \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2) + o_p(\gamma - \gamma_0).
 \end{aligned}$$

En vertu de (3.32), nous pouvons conclure que

$$U_\gamma = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \log(c_\gamma) + \log(r_{1i}^2) - \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2) \\ -\frac{\partial}{\partial \gamma_2} \log(c_\gamma) + \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2) - \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2) \\ -\frac{\partial}{\partial \gamma_3} \log(c_\gamma) + \log(r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + r_{3i}^2) \end{pmatrix}_{3 \times 1}. \quad (3.33)$$

Ainsi, de (3.31) et (3.33), nous voulons montrer que

$$E(U_\gamma^j U_m^k) = 0, \quad j = 1, 2, 3 \text{ et } k = 1, \dots, 6.$$

où U_γ^j et U_m^k , la j et la k ème composante de U_γ et U_m respectivement. Notons que cette espérance est calculée en supposant que la vraie valeur de M est I_4 .

Ainsi les n vecteurs de l'échantillon sont tous distribués selon $g_{\gamma, I_4}(\cdot) = g_\gamma(\cdot)$.

Prenons U_γ^1 et U_m^1 , nous avons

$$E(U_\gamma^1 U_m^1) = -2\gamma_1 n^2 \left[-\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \log(c_\gamma) E\left(\frac{q_2}{q_1}\right) + E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2)\right) - E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2 + q_2^2)\right) \right].$$

En faisant le changement de variable, $p = (-q_1, q_2, q_3, q_4)^t$, le jacobien est égal à 1, et par suite

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2)\right) &= \int_{S^3} \frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2) g_\gamma(q) dq \\
 &= - \int_{S^3} \frac{p_2}{p_1} \log(p_1^2) g_\gamma(p) dp \\
 &= -E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2)\right),
 \end{aligned}$$

donc

$$E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2)\right) = 0.$$

De même, nous obtenons

$$E\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = 0$$

et

$$E\left(\frac{q_2}{q_1} \log(q_1^2 + q_2^2)\right) = 0.$$

D'où

$$E(U_\gamma^1 U_m^1) = 0.$$

Nous procédons de même façon, pour $j = 1, 2, 3$, et pour $k = 1, \dots, 6$. Nous aurons

$$E(U_\gamma^j U_m^k) = 0.$$

Il en découle,

$$i_{\gamma m} = i_{m\gamma}^t = (E(U_\gamma^j U_m^k))_{j,k} = 0_{3 \times 6},$$

d'où le résultat.

□

Nous avons déterminé ci-dessus la matrice d'information de Fisher pour notre modèle. La proposition suivante donne la distribution asymptotique pour \hat{m}_{MV} et $\hat{\gamma}_{MV}$, les estimateurs par la méthode du maximum de vraisemblance de m et γ respectivement

Proposition 9. Lorsque n tend vers l'infini, nous avons

$$n^{1/2} (\hat{\gamma}_{MV} - \gamma, \hat{m}_{MV})^t \sim N_9 \left(0_9, \begin{pmatrix} \text{diag}[\gamma(j, j)]_{1 \leq j \leq 3} & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 3} & \text{diag}[m(k, k)]_{1 \leq k \leq 6} \end{pmatrix}_{9 \times 9}^{-1} \right),$$

où $\gamma(j, j)$ et $m(k, k)$, $j = 1, 2, 3$ et $k = 1, \dots, 6$, sont données explicitement dans la proposition 8.

Démonstration : (Cox et Hinkley (1984), chapitre 9).

Pour terminer ce chapitre, nous allons discuter de l'efficacité de l'estimateur des moments de m et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^t$. Cette efficacité est définie pour chaque composante de m et de γ , comme étant le rapport de la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance sur la variance de l'estimateur des moments. Étudions d'abord l'efficacité pour la deuxième composante du vecteur m . En vertu de (3.21) et (3.28), lorsque γ_3 est grand, l'efficacité de \hat{m}_2 est donnée par

$$\frac{\gamma_2 \left(\gamma_2 + \frac{5}{2} \right) \left[\frac{(\gamma_1 + 1)}{2} - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2} \right) (\gamma_2 + 1) \right]^2}{\left[\frac{\gamma_1^3}{\gamma_1 - \frac{1}{2}} + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 (\gamma_1 + \frac{1}{2})}{\gamma_1 + 1} + 2\gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1) \right] \left(\gamma_2 + \frac{3}{2} \right) (\gamma_2 + 1) (\gamma_1 + 1) (\gamma_1 + \frac{1}{2})}$$

Cette fonction est croissante en $\gamma_1 \geq 0$. Pour l'étudier nous posons $\gamma_1 = 1$. La valeur calculée représente alors l'efficacité minimale, pour $\gamma_1 \geq 1$, en fonction de γ_2 . Cette efficacité minimale est représentée à la figure 3.1.

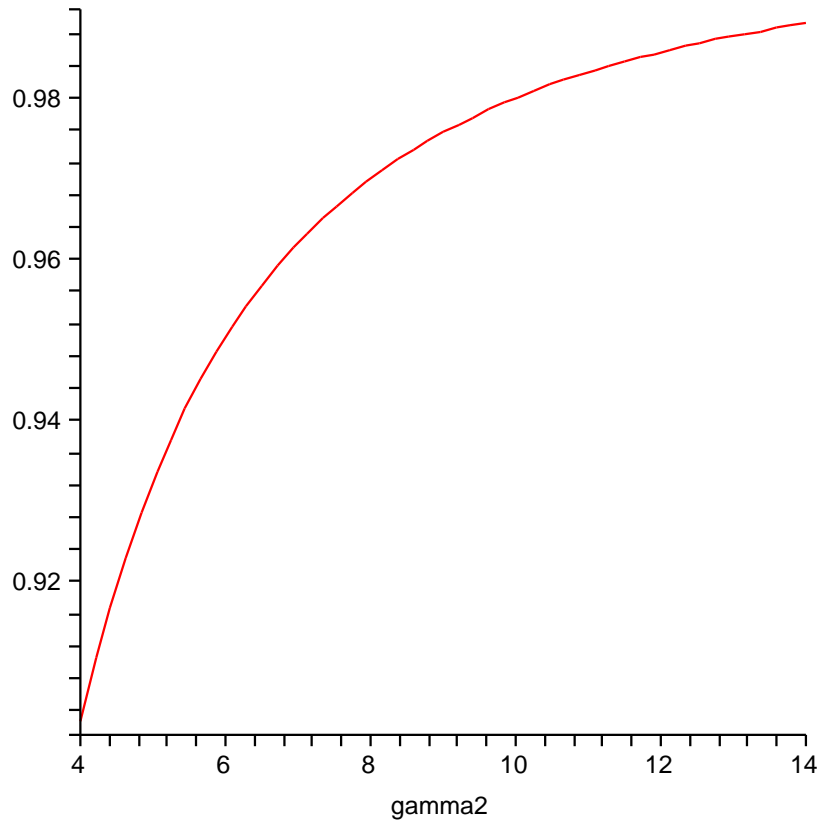


FIG. 3.1 – Efficacité minimale, pour $\gamma_1 \geq 1$, de l'estimateur des moments pour m_2 .

La courbe présentée dans la figure 3.1 indique que l'estimateur des moments de m_2 est un bon estimateur, quand $\gamma_2 > 4$. Pour les autres composantes de \hat{m} , en faisant une analyse similaire, nous concluons que l'estimateur des moments est assez précis. Si $\gamma_1 > 4$, l'efficacité pour les 6 composantes de m est supérieur à 90%. Maintenant, nous allons étudier l'efficacité de l'estimateur des moments de γ . Pour cela, nous allons prendre une composante parmi les

trois, prenons par exemple γ_3 . En vertu de (3.18) et (3.27), l'efficacité de $\hat{\gamma}_3$ est donnée par

$$\frac{(\gamma_3 + 3)}{2(\gamma_3 + 2)^2(\gamma_3 + \frac{2}{3}) [\Psi'(\gamma_3 + 2) - \Psi'(\gamma_3 + \frac{3}{2})]}.$$

La figure suivante, présente l'efficacité de $\hat{\gamma}_3$ en fonction de γ_3 :

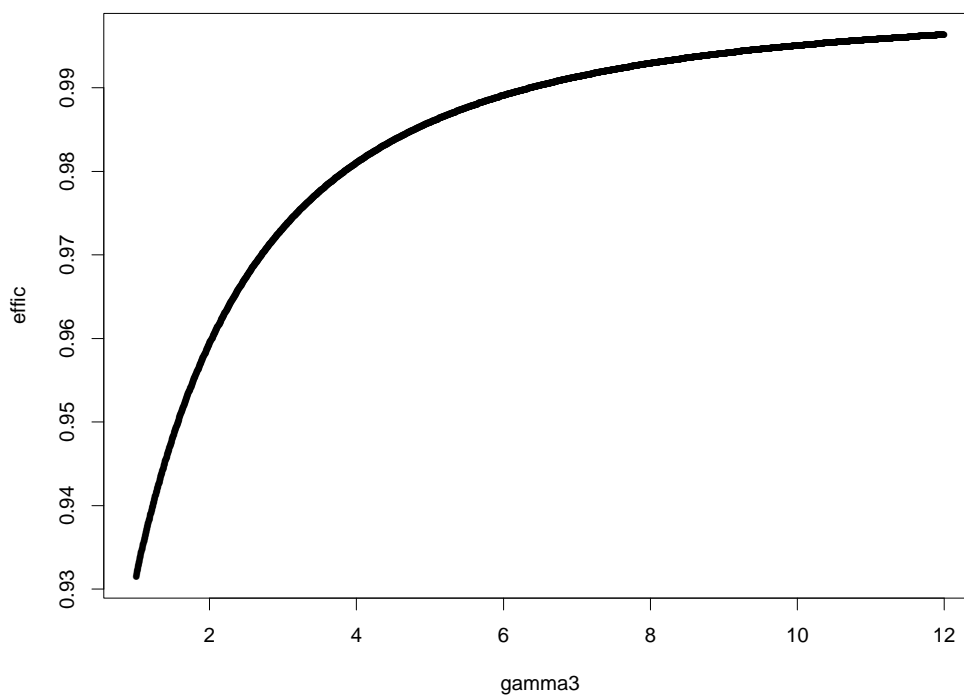


FIG. 3.2 – Efficacité de l'estimateur des moments pour γ_3 .

La courbe présentée dans la figure 3.2 indique clairement que l'estimateur des moments $\hat{\gamma}_3$ est un bon estimateur quand $\gamma_3 > 2$. De même, pour des grandes valeurs de γ_3 , l'estimateur des moments de γ_2 est un bon estimateur

quand $\gamma_2 > 2$. De même, pour des grandes valeurs de γ_2 , l'estimateur des moments de γ_1 est un bon estimateur, quand $\gamma_1 > 2$.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE DONNÉES

Ce chapitre est consacré à une application de notre modèle pour décrire la posture de corps solides. L'analyse de données permettra d'illustrer la méthodologie présentée aux chapitres II et III.

4.1 Présentation des données

Le jeu de données sur lequel nous allons baser notre analyse est obtenu par l'expérience suivante : nous faisons intervenir huit sujets (personnes), chacune ayant une perceuse à la main et tentant de cibler 6 positions différentes. L'expérience est illustrée à la figure 4.4. Chaque participant doit viser les 6 positions à cinq reprises. Les $30 = 6 \times 5$ prises de mesure sont faites dans un ordre aléatoire. Pour chacune, le sujet reste immobile durant deux à trois secondes. Les coordonnées (x, y, z) des quatre diodes attachées à chaque marqueur sont alors enregistrées par un système de camera Selspot. Après chaque prise de mesure, le sujet revient à la position initiale et se repose deux à trois secondes et passe à la mesure suivante. Lors d'une prise de mesure, les positions des marqueurs sont enregistrées dans le système d'axe global. Ce dernier est propre au laboratoire et indépendant des sujets. La position d'un marqueur par rapport au membre auquel il est fixé définit le système de

coordonnées local. L'axe des y est parallèle à la direction du membre et l'axe des x est orienté vers l'arrière, comme le montre la figure 4.3. Les coordonnées des quatre diodes attachées à un marqueur sont transformées en une matrice de rotation, R , 3×3 , dont les colonnes donnent l'orientation dans le système global des axes locaux définis précédemment.

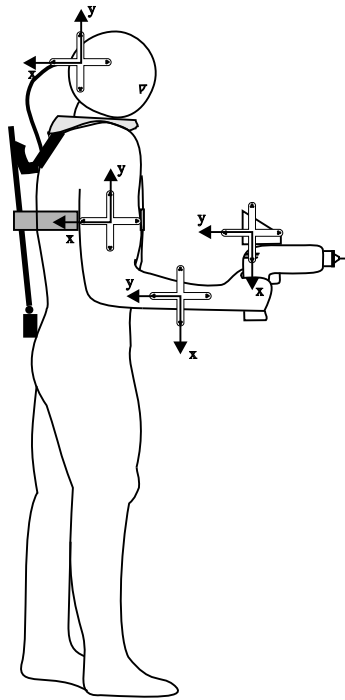


FIG. 4.3 – Localisation et orientation des marqueurs dans la tâche de perçage

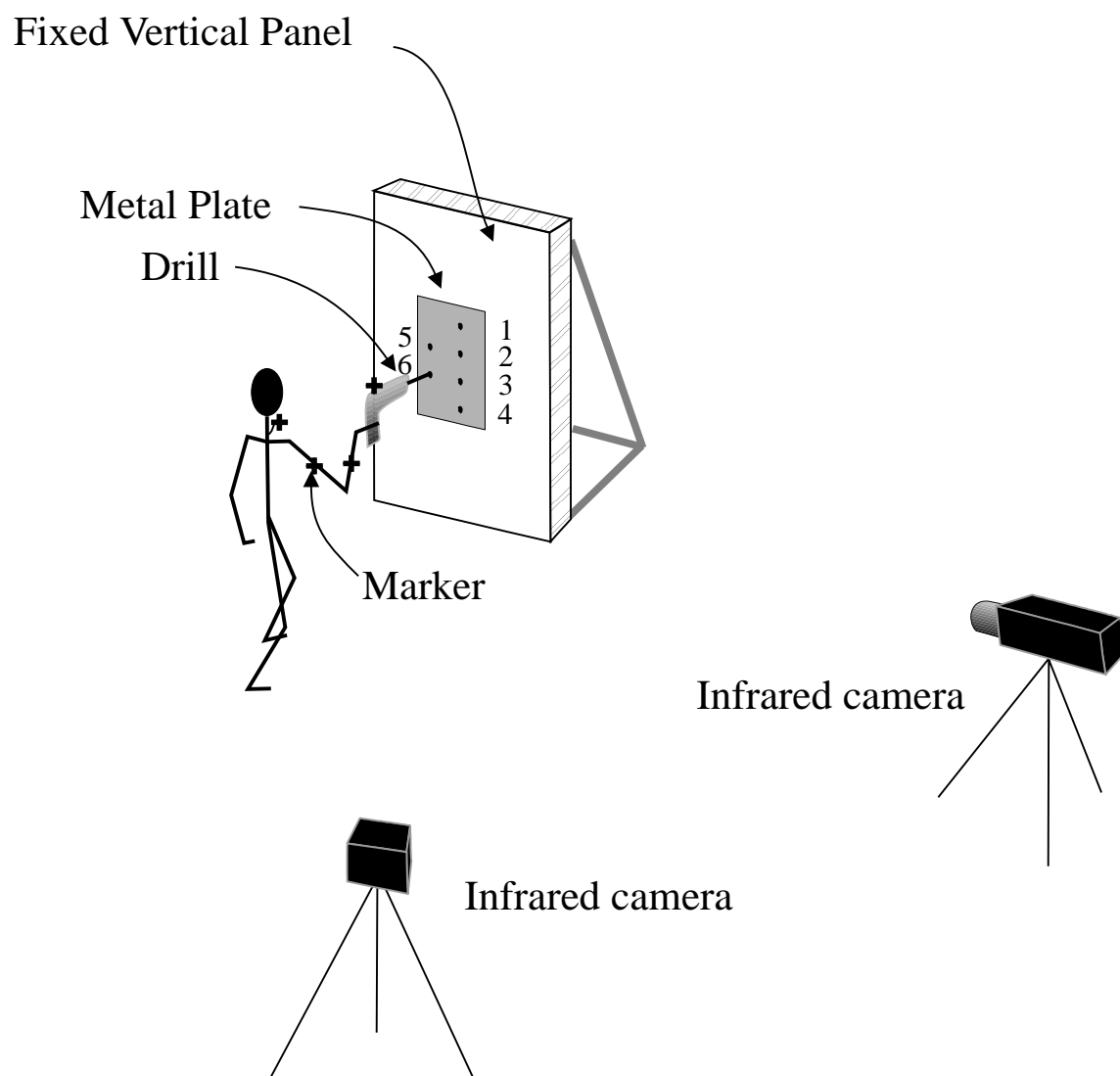


FIG. 4.4 – Dispositif expérimental

4.2 Estimation des paramètres par la méthode des moments

Dans cette section, nous ajustons le modèle présenté dans les chapitres II et III aux données recueillies pour un membre d'un sujet expérimental, afin de bien pouvoir expliquer le mouvement des sujets en question. Il y a donc $8 \times 4 = 32$ échantillons, de taille inférieure ou égale à 30. D'abord, nous avons les deux tableaux suivants :

j	k	$\hat{\gamma}_1(et_1)$	$\hat{\gamma}_2(et_2)$	$\hat{\gamma}_3(et_3)$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$
1	1	793.9(205.1)	2100.6(542.5)	3413.7(881.7)	0.999	0.0006	0.0002	0.0001
1	2	20.9(5.5)	290.8(75.27533)	1186.4(306.6)	0.975	0.0228	0.0017	0.0004
1	3	25.4(6.6)	65.8(17.2)	721(186.5)	0.973	0.0188	0.0074	0.0007
2	1	427.8(110.5)	968.8(250.3)	1263.8(326.6)	0.998	0.0012	0.0005	0.0004
2	2	63.6(16.5)	177.7(46.1)	1228(317.4)	0.989	0.0077	0.0028	0.0004
2	3	13.4(3.5)	211.6(54.8)	3320.4(857.6)	0.963	0.0346	0.0023	0.0002
2	4	112(28.9)	530.5(137.1)	1054.9(272.7)	0.994	0.0044	0.0009	0.0005
3	1	720.1(185.9)	1294(334.3)	1938.7(500.8)	0.999	0.0007	0.0004	0.0003
3	2	18.5(4.8)	279.2(72.3)	2599.1(671.4)	0.972	0.0256	0.0018	0.0002
3	3	18.1(4.7)	37.6(9.9)	548.5(141.9)	0.96	0.0259	0.0128	0.0009
3	4	83.6(21.6)	1296.4(334.9)	3643.2(941)	0.994	0.0059	0.0004	0.0001
4	1	597.9(154.4)	1299.6(335.7)	4248.3(1097.2)	0.999	0.0008	0.0004	0.0001
4	2	25.3(6.6)	308.4(79.8)	2470.6(638.2)	0.979	0.019	0.0016	0.0002
4	3	24.7(6.4)	410.2(106.1)	1508(389.7)	0.979	0.0194	0.0012	0.0003
4	4	215.6(55.7)	3479.2(898.5)	5326.7(1375.6)	0.997	0.0023	0.0001	0.0001

Tableau 1 : Estimation de γ_1 , γ_2 et γ_3 avec écarts types (et), voir (3.19) de la proposition 6 ; estimation de λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 , les valeurs propres de la matrice B_0 , voir (3.5), obtenues par la méthode des moments. Les indices j désignent les quatre premiers sujets et les indices k les quatre membres (poignet, avant-bras, bras et le dos).

j	k	$\hat{\gamma}_1(et_1)$	$\hat{\gamma}_2(et_2)$	$\hat{\gamma}_3(et_3)$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$
5	1	782.9(202.2)	1755(453.3)	3109.6(803.2)	0.999	0.0006	0.0003	0.0002
5	2	11.8(3.1)	169.7(44)	1233.3(318.7)	0.958	0.039	0.0029	0.0004
5	3	8(2.1)	258(66.8)	446.2(115.5)	0.941	0.0556	0.0019	0.0011
5	4	39.4(10.2)	483.3(124.9)	857(221.6)	0.986	0.0123	0.001	0.0006
6	1	278(71.9)	3353.3(866)	5517.8(1425)	0.998	0.0018	0.0001	0.0001
6	2	30.1(7.8)	312.8(80.9)	1435.5(370.9)	0.982	0.016	0.0016	0.0003
6	3	12.6(3.3)	336.5(87.1)	1166.5(301.5)	0.962	0.0366	0.0015	0.0004
6	4	249.9(64.6)	1234.3(318.9)	5897.7(1523.1)	0.998	0.002	0.0004	0.0001
7	1	144.6(37.4)	569.5(147.2)	3787.5(978.2)	0.996	0.0034	0.0009	0.0001
7	2	12.6(3.3)	309.6(80.1)	575.4(148.9)	0.961	0.0367	0.0016	0.0009
7	3	14.9(3.9)	211.1(54.7)	625.5(161.8)	0.965	0.0314	0.0024	0.0008
7	4	54(14)	402(103.9)	1582.1(408.8)	0.989	0.0091	0.0012	0.0003
8	1	235.2(60.8)	753.2(194.7)	2748.1(709.9)	0.997	0.0021	0.0007	0.0002
8	2	10.5(2.8)	134.5(34.9)	738.2(190.9)	0.952	0.0433	0.0037	0.0007
8	3	13.1(3.4)	175(45.4)	324.7(84.1)	0.96	0.0353	0.0028	0.0015
8	4	47.8(12.4)	256.3(66.4)	664.3(171.8)	0.987	0.0102	0.0019	0.0008

Tableau 2 : Estimation de γ_1 , γ_2 et γ_3 avec écarts types (et) ; estimation de λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 , obtenues par la méthode des moments. Les indices j désignent les quatre derniers sujets et les indices k les quatre membres (poignet, avant-bras, bras et le dos).

En analysant les tableaux 1 et 2, il apparaît deux cas de répartition des quaternions, correspondent aux deux cas limites étudiés à la section 2.4. Prenons ainsi dans tableau 2, le sujet 5. Pour le poignet, $k = 1$, nous avons, $\hat{\gamma}_1 = 782.9$, ($et_1 = 202.2$), $\hat{\gamma}_2 = 1755$, ($et_2 = 453.3$) et $\hat{\gamma}_3 = 3109.6$, ($et_3 = 803.2$). Nous voyons que tous les $\hat{\gamma}_j$ sont grands, ce qui correspond au 1 er cas limite. De même, pour le dos, $k = 4$, du sujet $j = 4$, nous avons $\hat{\gamma}_1 = 215$, ($et_1 = 55.7$), $\hat{\gamma}_2 = 3479.2$, ($et_2 = 898.5$) et $\hat{\gamma}_3 = 5326.7$, ($et_3 = 1375.6$). Nous voyons que tous les $\hat{\gamma}_j$ sont encore grands. En général les échantillons pour la posture du poignet et du dos donnent de grandes valeurs pour les $\hat{\gamma}_j$ (voir les tableaux 1 et 2 pour les huit sujets et pour $k = 1, 4$). Cela signifie que au moment où un sujet tente de cibler une position sur la plaque de métal, la variabilité de la posture de son poignet ainsi que celle de son dos ne change pas beaucoup ; ceci apparaît clair et logique en essayant de faire cet exercice plusieurs fois. La posture de l'avant-bras et du bras correspondent au 2 ème cas limite. En effet, prenons par exemple le sujet $j = 5$. Pour l'avant-bras, nous avons $\hat{\gamma}_1(et) = 11.8$, ($et_1 = 3.1$), n'est pas grand, $\hat{\gamma}_2 = 169.7$, ($et_2 = 44$) et $\hat{\gamma}_3 = 1233.3$, ($et_3 = 318.7$) sont grands. De même, pour le bras, $k = 3$, prenons $j = 5$. Nous avons $\hat{\gamma}_1 = 8$, ($et_1 = 2.2$), n'est pas grande, $\hat{\gamma}_2 = 258$, ($et_2 = 66.8$) et $\hat{\gamma}_3 = 446.2$, ($et_3 = 115.5$) sont grands. En général les échantillons pour la posture de l'avant-bras et du bras donnent de grandes valeurs pour $\hat{\gamma}_2$ et $\hat{\gamma}_3$ (voir les tableaux 1 et 2 pour les huit sujets et pour $k = 2, 3$). Dans ce cas là, les quaternions sont répartis autour d'un grand cercle de S^3 , tel que décrit à la section 2.4. Au point de vue pratique, cela signifie que au moment où le sujet cible de nouveau une position sur

la plaque du métal, la variabilité de la posture de l'avant-bras et du bras, est attribuable à des mouvements de rotation autour d'un axe fixe μ , voir section 3.3. Pour bien décrire cette variabilité, nous allons estimer cet axe de rotation privilégiée μ . Ainsi, nous pourrions comprendre les changements de la posture de l'avant-bras et du bras. Pour déterminer $\hat{\mu}$, nous avons besoin de \hat{M}_1 et \hat{M}_2 , voir (3.23).

Interprétation de $\hat{\mu}$

Soient deux rotations R_i et R_j recueillies lors de l'expérience précédente. Rappelons que lorsque $\hat{\gamma}_2$ et $\hat{\gamma}_3$ sont grands, on peut approximer R_i par

$$R_i = R_0 R(\theta_i, \hat{\mu})$$

et

$$R_j = R_0 R(\theta_j, \hat{\mu}).$$

Ainsi

$$R(\theta_j - \theta_i, \hat{\mu}) = R(\theta_j, \hat{\mu}) R(\theta_i, \hat{\mu})^t.$$

Donc, pour qu'un membre passe de la rotation R_i à la rotation R_j , dans le système de coordonnées global, il faut qu'il tourne d'un angle $\theta_j - \theta_i$ autour de l'axe $\hat{\mu}$, dans le système de coordonnées local.

Le tableau suivant donne les composantes des estimateurs : $\hat{M}_1 = r_0$, le quaternion associé à la rotation moyenne R_0 , et $\hat{\mu}$, pour l'avant-bras et le bras ($k = 2, 3$).

j	k	\hat{M}_{11}	\hat{M}_{21}	\hat{M}_{31}	\hat{M}_{41}	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$
1	2	-0.98	-0.088	-0.17	0.06	-0.515	0.18	0.84
1	3	0.901	0.052	-0.061	0.425	0.23	-0.24	-0.94
2	3	-0.814	-0.077	-0.383	0.431	-0.524	-0.36	0.77
3	2	-0.947	0.031	-0.227	0.224	-0.701	-0.68	0.71
3	3	0.863	0.178	-0.083	0.464	-0.179	-0.65	-0.74
4	2	-0.573	-0.063	-0.359	0.734	-0.309	-0.84	0.45
4	3	-0.948	-0.241	-0.137	0.156	-0.774	0.29	0.56
5	2	-0.959	-0.166	0.206	0.059	-0.715	0.03	0.67
5	3	0.713	0.181	-0.243	0.632	-0.431	-0.8	-0.41
6	2	-0.606	-0.024	-0.233	0.76	-0.225	0.74	0.63
6	3	-0.917	-0.109	-0.103	0.369	-0.326	-0.24	0.91
7	2	0.605	0.136	-0.189	0.761	-0.339	0.69	-0.64
7	3	-0.939	-0.3	-0.158	0.047	0.59	0.59	0.55
8	2	0.574	0.157	-0.299	0.746	-0.333	0.84	-0.44
8	3	-0.925	-0.308	-0.222	0.025	-0.496	-0.61	-0.62

Tableau 3 : Estimation du vecteur $M_1 = (M_{11}, M_{21}, M_{31}, M_{41})^t$, associé à la rotation moyenne R_0 et estimation de l'axe de rotation dans le système de coordonnées local, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^t$, pour l'avant-bras et le bras, $k = 2, 3$, et pour tous les sujets, $j = 1, \dots, 8$.

En vertu du tableau 3, nous pouvons conclure que la variation de la posture de l'avant-bras et du bras s'explique par des rotations autour de l'axe des z ou bien autour de l'axe des y . En effet, prenons le sujet 1. Pour le bras, nous avons $\hat{\mu}_1 = 0.23$, $\hat{\mu}_2 = -0.24$ et $\hat{\mu}_3 = -0.94$. Donc, la variation de la posture du bras s'explique par des rotations autour de l'axe des z . De même, prenons le sujet 8, pour l'avant-bras, nous avons $\hat{\mu}_1 = -0.33$, $\hat{\mu}_2 = 0.84$ et $\hat{\mu}_3 = -0.44$. Donc, les variations de la posture de l'avant-bras s'expliquent par des rotations autour de l'axe des y . D'après ce qui précède et ce que nous avons vu dans la section 3.3, nous concluons que γ_1 caractérise la variabilité de la posture des membres du sujet, c'est à dire plus γ_1 diminue plus la variabilité augmente. Ceci apparaît clairement en regardant l'équation (3.25). Cette relation aide à relier les valeurs de γ_1 à la grandeur des erreurs. Donc pour une variabilité(θ_i) entre $[-10, 10]$, $[-20, 20]$ et $[-30, 30]$, avec un niveau de confiance de 95%, les valeurs de γ_1 sont respectivement : 586, 159 et 69.

CONCLUSION

Ce mémoire a proposé et décrit un modèle statistique pour les rotations. Nous avons présenté dans un premier temps une rotation dans l'espace comme l'exponentielle d'une matrice antisymétrique et comme un quaternion. Dans un deuxième temps, nous avons vu un modèle statistique relativement simple en termes de quaternions. Il s'agit d'un bon outil pour décrire la variabilité d'un échantillon de rotations. De plus, nous avons déterminé explicitement les estimateurs des paramètres du modèle par la méthode des moments et leurs propriétés asymptotiques. De même, nous avons déterminé la distribution asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance pour ces paramètres. Cette étude nous a aidé à examiner l'efficacité des estimateurs obtenus par la méthode des moments, qui se sont avérés être de bons estimateurs.

Si le temps l'avait permis, nous aurions étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur de l'axe de rotation μ . De plus, nous aurions pu étudier les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et les obtenir numériquement par des algorithmes de calculs.

ANNEXE

Dans la présente annexe, nous allons présenter les démonstrations qui n'apparaissent pas dans le mémoire, ainsi que les programmes en Splus, que nous avons utilisé.

A.1 Calcul de la mesure invariante dq

Nous allons commencer d'abord par le calcul de la mesure invariante dq de S^3 , définie dans (2.8). Pour ce faire, rappelons que les quaternions de S_+^3 définis à l'aide de la transformation de Cayley sont de la forme

$$q = \frac{(1, s')}{\sqrt{1 + s's}} \quad s = (s_1, s_2, s_3)^t \in \mathfrak{R}^3.$$

Ainsi, la matrice des dérivées partielles de q par rapport à s est 4×3 . En effet,

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{1}{(1 + s's)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} s^t}{(1 + s's)^{3/2}}. \quad (5.1)$$

Donc, pour calculer le jacobien de cette transformation, nous procédons par une technique donnée dans Fleming (1965) qui dit que ce jacobien est égal à la racine de la somme des carrés des quatre déterminants des matrices 3×3 obtenues en retirant les lignes une par une. En retirant la première ligne de la matrice donnée dans (5.1), nous obtenons une matrice 3×3 ; son déterminant est donné par

$$\frac{1}{(1 + s's)^{3/2}} \left| I_3 - \frac{ss^t}{1 + s's} \right|,$$

où $|\cdot|$, désigne le déterminant. Or, la matrice 3×3 , $I_3 - ss^t/(1 + s^t s)$, a 1 comme valeur propre double et $1/(1 + s^t s)$ comme valeur propre simple. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \left(I_3 - \frac{ss^t}{1 + s^t s}\right)s &= s\left(1 - \frac{s^t s}{1 + s^t s}\right) \\ &= \frac{1}{1 + s^t s}s. \end{aligned}$$

Etant donné $u \in \mathfrak{R}^3$, nous voulons résoudre l'équation

$$\left(I_3 - \frac{ss^t}{1 + s^t s} - \beta I_3\right)u = \left[(1 - \beta)I_3 - \frac{ss^t}{1 + s^t s}\right]u = 0.$$

Pour $\beta = 1$, l'équation ci-dessus implique que $s^t u = 0$. Or puisqu'il existe deux vecteurs u_1 et u_2 non colinéaires de \mathfrak{R}^3 , tel que $s^t u_1 = s^t u_2 = 0$ (ce sont les deux vecteurs orthogonaux qui engendrent le plan de \mathfrak{R}^2 perpendiculaire à s). Donc 1 est une valeur propre associée à la fois à u_1 et u_2 , d'où le résultat. Par suite, il en découle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + s^t s)^{3/2}} \left| I_3 - \frac{ss^t}{1 + s^t s} \right| &= \frac{1}{(1 + s^t s)^{3/2}} \frac{1}{(1 + s^t s)} \\ &= \frac{1}{(1 + s^t s)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ensuite, en retirant la deuxième ligne de la matrice donnée dans (5.1), nous obtenons une matrice 3×3 . Son déterminant, après simplification, est donné par

$$-\frac{s_1}{(1 + s^t s)^{5/2}}. \quad (5.3)$$

De même, par symétrie, en retirant les lignes 3 et 4 respectivement, de la matrice donnée dans (5.1), les déterminants associés sont donnés respectivement par

$$-\frac{s_2}{(1 + s^t s)^{5/2}}. \quad (5.4)$$

et

$$-\frac{s_3}{(1+s^t s)^{5/2}}. \quad (5.5)$$

En faisant la somme des carrés des quatre déterminants obtenues dans (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5), nous avons

$$\frac{1}{(1+s^t s)^4}.$$

En passant à la racine carrée, cela donne

$$\frac{1}{(1+s^t s)^2},$$

d'où le résultat (2.8).

□

A.2 Calculs détaillés pour la proposition 7

Nous allons présenter les calculs détaillés des composantes des matrices de variance-covariance Σ_m et i_{mm} données respectivement dans la proposition 7 et 8. Commençons d'abord à expliciter les composantes de Σ_m . Pour cela, prenons par exemple la 3 ème composante, que l'on note $\Sigma_m(3, 3)$. En vertu de (3.22), nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \Sigma_m(3, 3) &= \frac{1}{(\lambda_4 - \lambda_1)^2} E(q_4^2 q_1^2) \\ &= \frac{1}{[E(q_4^2) - E(q_1^2)]^2} [E(Z_1) - E(Z_3 Z_1)]. \end{aligned}$$

D'après (3.1), (3.6) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}\Sigma_m(3,3) &= \frac{(\gamma_1 + 1)^2(\gamma_2 + \frac{3}{2})^2(\gamma_3 + 2)^2}{\left[\frac{(\gamma_1+1)(\gamma_2+\frac{3}{2})}{2} - (\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})\right]^2} \\ &\times \frac{(\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_3 + 2)} \left[1 - \frac{(\gamma_3 + \frac{5}{2})}{(\gamma_3 + 3)}\right] \\ &= \frac{(\gamma_3 + 2)(\gamma_3 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + \frac{3}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1)(\gamma_1 + \frac{1}{2})}{2(\gamma_3 + 3) \left[\frac{(\gamma_1+1)(\gamma_2+\frac{3}{2})}{2} - (\gamma_1 + \frac{1}{2})(\gamma_2 + 1)(\gamma_3 + \frac{3}{2})\right]^2}.\end{aligned}$$

Toutes les autres composantes de Σ_m , ont été calculées de la même façon.

A.3 Calculs détaillés pour la proposition 8

Nous allons expliciter les composantes de i_{mm} . Pour ce faire, rappelons que

$$i_{mm} = \text{diag}((E[(U_M^j)^2])_{6 \times 6}).$$

D'après (3.31), la 3 ème composante de i_{mm} , denotée par, $i_{mm}(3,3)$, est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}i_{mm}(3,3) &= E[(U_M^3)^2] \\ &= 4nE\left[\gamma_1^2 \frac{q_4^2}{q_1^2} + 2\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{q_4^2}{q_1^2 + q_2^2} + (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \frac{q_1^2 q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2)^2}\right. \\ &\quad + 2\gamma_1(\gamma_3 - \gamma_2) \frac{q_4^2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + 2(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{q_1^2 q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)} \\ &\quad \left. + (\gamma_3 - \gamma_2)^2 \frac{q_1^2 q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2}\right] \\ &= 4n\left[\gamma_1^2 E\left(\frac{1 - Z_3}{Z_1}\right) + 2\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) E\left(\frac{1 - Z_3}{Z_2}\right) + (\gamma_2 - \gamma_1)^2 E\left(\frac{Z_1(1 - Z_3)}{Z_2^2}\right)\right. \\ &\quad + 2\gamma_1(\gamma_3 - \gamma_2) E\left(\frac{1 - Z_3}{Z_3}\right) + 2(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1) E\left(\frac{Z_1(1 - Z_3)}{Z_2 Z_3}\right) \\ &\quad \left. + (\gamma_3 - \gamma_2)^2 E\left(\frac{Z_1(1 - Z_3)}{Z_3^2}\right)\right].\end{aligned}$$

En vertu de (3.1), en remplaçant les espérances ci-dessus, en fonction de γ_1 , γ_2 et γ_3 , nous obtenons exactement $i_{mm}(3,3)$ de la Proposition 8. Toutes les

autres composantes de i_{mm} , ont été calculées de la même façon.

□

A.4 Programme

Programme pour le calcul des $\hat{\lambda}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, le vecteur \hat{M}_1 et $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_3$ et leurs écarts types (*et*), qui sont donnés dans les tableaux 1, 2 et 3, pour le 1^{er} échantillon de données de taille 30 :

```
donn.ran <- read.table("donneerota1.dat",header=TRUE)
```

"donneerota1.dat" c'est le fichier des données recueillies sous forme de quaternions r_i , $i = 1, \dots, 960$.

```
p1 <- r1[1 : 30]
```

```
p2 <- r2[1 : 30]
```

```
p3 <- r3[1 : 30]
```

```
p4 <- r4[1 : 30]
```

```
p1 <- p1[!is.na(p1)]
```

```
p2 <- p2[!is.na(p2)]
```

```
p3 <- p3[!is.na(p3)]
```

```
p4 <- p4[!is.na(p4)]
```

```
R <- cbind(p1, p2, p3, p4)
```

R est une matrice 30×4 , composée par les 30 quaternions r_i .

```
MPC <- t(R)% * %R/30
```

MPC est la matrice \hat{B} , 4×4 .

$VP < - eigen(MPC)$

$names(VP)$

$VP\$values$

Cette commande donne les valeurs propres de \hat{B} , c'est-à-dire les $\hat{\lambda}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

$VP\$vectors$

Cette commande donne les vecteurs propres de \hat{B} , c'est-à-dire les \hat{M}_j , $j = 1, 2, 3, 4$.

$phi1 < - hatlambda1$

$phi2 < - phi1 + hatlambda2$

$phi3 < - phi2 + hatlambda3$

$hatgamma1 < - ((phi2/(phi2 - phi1)) - 2)/2$

$hatgamma2 < - ((phi2/(phi3 - phi2)) - 2)/2$

$hatgamma3 < - ((1/(1 - phi3)) - 4)/2$

$var1 < - 2 * (hatgamma3 + 5/2) * (hatgamma3 + 2) * (hatgamma2 + 2) * (hatgamma2 + 3/2) * ((hatgamma1 + 1) * * 2) * (hatgamma1 + 1/2) / ((hatgamma3 + 3) * (hatgamma3 + 3/2) * (hatgamma2 + 5/2) * (hatgamma2 + 1) * (hatgamma1 + 2))$

$var2 < - 2 * (hatgamma3 + 5/2) * (hatgamma3 + 2) * ((hatgamma2 + 3/2) * * 2) * (hatgamma2 + 1) / ((hatgamma3 + 3) * (hatgamma3 + 3/2) * (hatgamma2 + 5/2))$

$$\text{var3} < - 2 * (\text{hatgamma3} + 2)^2 * (\text{hatgamma3} + 3/2) / (\text{hatgamma3} + 3)$$

$$\text{et1} < - \text{sqr}t(\text{var1}/30)$$

$$\text{et2} < - \text{sqr}t(\text{var2}/30)$$

$$\text{et3} < - \text{sqr}t(\text{var3}/30)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abramowitz, Milton and Stegun, Irene A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York.
- [2] Carlos, A. León, Massé, J. C. and Rivest, L. P. (2003). A statistical model for random rotations in $SO(p)$. Soumis pour publication.
- [3] Chikuse, Y. (2002). *Statistics on Special Manifolds*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Cox, D.R. and Hinkley, D. V. (1984). *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall.
- [5] Downs, T. D. (1972). Orientation statistics. *Biometrika*. **59**, 665-676.
- [6] Fleming, W. H. (1965). *Functions of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London.
- [7] Hamilton, W. R. (1969). *Elements of Quaternions*. Chelsea : Chelsea Press.
- [8] Jammalamadaka, S. R. and SenGupta, A. (2001). *Topics in Circular Statistics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. London.
- [9] Khatri, C. G. and Mardia, K. V. (1977). The von Mises-Fisher distribution in orientation statistics. *J. R. Statist. Soc.* **B 39**, 95-106.
- [10] Lancaster, P. and Tismenetsky, M. (1985). *The Theory of Matrices*. Academic Press, Inc. Orlando.
- [11] Mardia, K. V. and Jupp, P. E. (2000). *Directional Statistics*. New York : John Wiley.

- [12] McCarthy, J. M. (1990). *Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.
- [13] Prentice, M. J. (1986). Orientation statistics without parametric assumptions. *J. R. Statist. Soc. B* **48**, 214-222
- [14] Rancourt, D., Rivest, L. P. and Asselin, J. (2000). Using orientation statistics to investigate variations in human kinematics. *Appl. Statist.* **15**, 39-50.
- [15] Rivest, L. P. (2001). A directional model for the statistical analysis of movement in three dimensions. *Biometrika.* **88**, 3, pp. 779-791.
- [16] Rivest, L. P. (1984). On the information matrix for symmetric distributions on the hypersphere. *Annals of Statistics*. Vol. 12, No. 3, 1085-1089.
- [17] Warner, F. W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer. New York.
- [18] Watson, G. S. (1983). *Statistics on Spheres*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons. New York.
- [19] Zatiorsky, Vladimir M. (1998). *Kinematics of Human Motion*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. Pennsylvania state.